２００７年度数学 II 演習（理 I）No. 12　　　'07/12/10（月）４限

問１． V, W を K-線型空間, $f\colon V \to W$ を K-線型写像とする.

1) $v_1, \cdots, v_r \in V$ について, $f(v_1), \cdots, f(v_r) \in W$ が一次独立であるとする. このとき, $v_1, \cdots, v_r$ は一次独立であることを示せ.
2) $v_1, \cdots, v_r \in V$ が一次独立であるとする. f が単射であれば $f(v_1), \cdots, f(v_r) \in W$ は一次独立であることを示せ.
3) 主張「$v_1, \cdots, v_r \in V$ が一次独立であれば $f(v_1), \cdots, f(v_r) \in W$ は一次独立である」は f が単射でない時ににには必ずしも正しくない. そのような例（反例）を挙げよ.

問２． $V = \mathbb{R}^n$ または $\mathbb{C}^n$ とする（問ごとに指定する）. 1) から 4) の V とその基底に関して, 以下の作業をせよ.
a) V に標準内積を与えたとき, それぞれの K^n の基底を Gram-Schmidt の直交化法を用いて正規直交化せよ.
b) 与えられた基底が正規直交基底となるような V の内積（$K = \mathbb{R}$ であればリーマン計量, $K = \mathbb{C}$ であればエルミート計量）$\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ を求め, $G = (g_{ij})$, $g_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$, により定まる行列 G を求めよ. ただし, $\{e_1, \cdots, e_n\}$ は K^n の標準基底とする.

1) $V = \mathbb{R}^2$, $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$.
2) $V = \mathbb{C}^2$, $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$.
3) $V = \mathbb{R}^3$, $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.
4) $V = \mathbb{C}^3$, $\left\{\begin{pmatrix}1\\\sqrt{-1}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sqrt{-1}\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

問３． $\mathbb{R}^3$ とその標準内積を考える. $a \in S^2 = \left\{a \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \|a\| = 1\right\}$ と定める. S^2 は半径 1 の球面である. $W = \left\{v \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \langle v, a\rangle = 0\right\}$ とし, W への直交射影および W に関する鏡映をそれぞれ求めよ.

定義． K^n の点 p を通る方向ベクトル v の直線を, $\{p + tv \,|\, t \in K\}$ として定める.

問４． K^n とその標準的な内積を考える. $a \in K^n$, $a \neq 0$ とし, $W = \{v \in K^n \,|\, \langle v, a\rangle = 0\}$ とする.

1) $v \in K^n$ のとき, v を位置ベクトルとみなしたときの終点を通り W に直交する直線を求めよ.
2) 1) で求めた直線と W の交点を $f(v)$ とすると, $f(v) = v - \dfrac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle}a$ であることを示せ. （つまり, $f(v)$ は v の W への直交射影に等しい.）

問5． $V = \{f\colon \{1,2,3,4\} \to \mathbb{R}\} = $ 集合 $\{1,2,3,4\}$ から実数への函数 とする．V は函数の足し算と実数倍により $\mathbb{R}$-線型空間である．

1) $f, g \in V$ に対して $\langle f, g\rangle = \sum_{i=1}^{4} f(i)g(i)$ と定めると，$\langle\ \cdot\ ,\ \cdot\ \rangle$ は V の内積であることを示せ．以下では V はこの内積により計量線型空間とみなす．
2) $f_i \in V, i = 1, \ldots, 4,$ を $f_i(j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ により定めると，$\mathcal{V} = \{f_1, \cdots, f_4\}$ は V の正規直交基底であることを示せ．
3) $R\colon V \to V$ を $f \in V$ に対し $Rf(1) = f(4)$, $Rf(2) = f(1)$, $Rf(3) = f(2)$, $Rf(4) = f(3)$ と置くことで定める．R は等長写像であることを示せ．
4) R を $\mathcal{V}$ に関して行列表示せよ．
5) $L = R^{-1}$ と定める．$f \in V$ のとき，$Lf(i)$, $i = 1, \ldots, 4,$ を $f(1), \cdots, f(4)$ を用いてそれぞれ表せ．
6) R の随伴写像 R^* と L の随伴写像 L^* をそれぞれ求めよ．

問6． V を n 次元 $\mathbb{C}$-計量線型空間，$\langle\ \cdot\ ,\ \cdot\ \rangle$ を V の内積（エルミート計量）とする．

1) V を $\mathbb{R}$-線型空間とみなしたものを $V_{\mathbb{R}}$ と記す．$v, w \in V_{\mathbb{R}}$ に対して $\langle v, w\rangle_{\mathbb{R}} = \langle v, w\rangle$ と定めると，$\langle\ \cdot\ ,\ \cdot\ \rangle_{\mathbb{R}}$ は $V_{\mathbb{R}}$ の内積を定めることを示せ．
2) $\mathcal{V} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ を V の正規直交基底とする．このとき，
   $\mathcal{V}_{\mathbb{R}} = \{v_1, \sqrt{-1}v_1, v_2, \sqrt{-1}v_2, \cdots, v_n, \sqrt{-1}v_n\}$ は $V_{\mathbb{R}}$ の $\langle\ \cdot\ ,\ \cdot\ \rangle_{\mathbb{R}}$ に関する正規直交基底であることを示せ．
3) $f\colon V \to V$ を $\mathbb{C}$-線型写像とする．f を $V_{\mathbb{R}}$ から $V_{\mathbb{R}}$ への写像とみなせば，$\mathbb{R}$-線型写像であることを示せ．これを $f_{\mathbb{R}}$ と表すこととする．
4) f の $\mathcal{V}$ に関する行列表示が A であったとする（$A \in M_n(\mathbb{C})$ である）．$f_{\mathbb{R}}$ の $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ に関する行列表示を求めよ．
   注意：行列表示を $A_{\mathbb{R}}$ とすると，$A_{\mathbb{R}} \in M_{2n}(\mathbb{R})$ である．
5) 4) の行列表示を $A_{\mathbb{R}}$ とすると $\det A_{\mathbb{R}} \geq 0$ であることを示せ．
6) f が等長写像であれば，$f_{\mathbb{R}}$ も等長写像であることを示せ．
7) $V_{\mathbb{R}}$ から $V_{\mathbb{R}}$ への等長写像 g であるが，どのような等長写像 $f\colon V \to V$ に関しても $g = f_{\mathbb{R}}$ の形にはならないものが存在することを，例を挙げることにより示せ．
   ヒント：5) を用いると比較的容易である．

問7． V を n 次元 K-線型空間，W, W' を V の部分線型空間とし，$V = W \oplus W'$ とする．このとき，V の計量を適当に選んで，この計量に関して $V = W \mathbin{\widehat{\oplus}} W'$（直交直和）となるようにできることを示せ．

問8． V を n 次元 K-計量線型空間とする．

1) $W \subset V$ を $(n-1)$ 次元部分線型空間とすると，ある $a \in V$ が存在して $W = \{v \in V \mid \langle v, a \rangle = 0\}$ が成り立つことを示せ．
2) $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ とする．1) の条件 $\langle v, a \rangle$ を x_i, a_j 達を用いて表し，x_i 達の一次式であることを確かめよ．
3) 1) をみたす a 全体の集合に $0 \in V$ を付け加えた集合は $W^{\perp}$ に等しいことを示せ．
4) $a_1, \cdots, a_r \in V$ とし，$W = \{v \in V \mid \langle v, a_1 \rangle = \cdots = \langle v, a_r \rangle = 0\}$ と置く．$a_1, \cdots, a_r$ が一次独立であれば，$\dim W = n - r$ であることを示せ．
5) W が V の $(n-r)$ 次元部分線型空間であれば，ある $a_1, \cdots, a_r \in V$ が存在して $W = \{v \in V \mid \langle v, a_1 \rangle = \cdots = \langle v, a_r \rangle = 0\}$ が成り立つことを示せ．また，このとき，$a_1, \cdots, a_r$ で生成される V の部分空間 $\langle a_1, \cdots, a_r \rangle$ は W の直交補空間に等しいことを示せ．

問9． 自然数 d を一つ固定し，$V = \{$ 高々d 次の z に関する複素数係数多項式 $\}$ とする．

1) $\varphi \in V$ に対して $f(\varphi) = \dfrac{d\varphi}{dz}$ と定めると，f は V から V への（$\mathbb{C}$-）線型写像であることを示せ．
2) $\varphi(z) = \sum_{i=0}^{d} \varphi_i z^i$, $\psi(z) = \sum_{j=0}^{s} \psi_j z^j$, $\varphi_i, \psi_j \in \mathbb{C}$ のとき，$\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{i=0}^{d} \varphi_i \overline{\psi_i}$ とおくと，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は V のエルミート計量であることを示せ．
3) 2) のエルミート計量に関する V の正規直交基底を一組求めよ．
4) 1) の f は 2) のエルミート計量を保たないことを示せ．
5) f の 2) のエルミート計量に関する随伴写像を求めよ．
6) $\varphi \in V$ が $\varphi(z) = \sum_{i=0}^{d} \varphi_i z^d$, $\varphi_i \in \mathbb{C}$ と表されるとき，$g(\varphi)$ を条件 $g(\varphi)(z) = \displaystyle\sum_{i=0}^{d} \frac{\varphi_i}{i+1} z^i$ で定める．（$g(\varphi)$ は形式的に φ を「0 から z まで」積分して，z で割ったものである．）$g\colon V \to V$ は（$\mathbb{C}$-）線型同型写像であることを示せ．
7) g の 2) のエルミート計量に関する随伴写像を求めよ．
8) $d > 0$ とすると g は 2) のエルミート計量を保たないことを示せ．
9) $d > 0$ とすると g を等長写像とするような V のエルミート計量は存在しないことを示せ．
   ヒント：V のエルミート計量を任意に一つ選び，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ とする．いくつかの V の元 φ に対して $\langle \varphi, \varphi \rangle$, $\langle g(\varphi), g(\varphi) \rangle$ を計算してみよ．

問 10． $M_{m,n}(K) = \{K$ の元を成分とする (m,n)-行列 $\}$ とする．$M_{m,n}(K)$ は行列の加法と K の元との積により, K-線型空間であった．これを V とする．

1) $X, Y \in V$ に対して $\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}\,({}^tX\overline{Y})$ とおくと, $\langle\ \cdot\ ,\ \cdot\ \rangle$ は V の内積（リーマン計量あるいはエルミート計量）を定めることを示せ．以下では V はこの計量により計量線型空間とみなす．
   ヒント：$n = 1$ の時には V は K^m（に標準内積を与えたもの）そのものである．
2) V の正規直交基底を一組求めよ．
3) $W = K^n$ とし, 標準的な内積を与える．V から W への等長写像（計量計量を保つ線型同型写像）を一つ求めよ．
4) $A \in M_m(K)$ のとき, $f_A\colon V \to V$ を $f_A(X) = AX$ により定める．f_A は K-線型写像であることを示し, 2) で求めた基底に関して f_A を行列表示せよ．
5) $B \in M_n(K)$ のとき, $g_B\colon V \to V$ を $g_B(X) = XB$ により定める．g_B は K-線型写像であることを示し, 2) で求めた基底に関して g_B を行列表示せよ．
6) A, B が共に直交行列（$K = \mathbb{R}$ の時）あるいはユニタリ行列（$K = \mathbb{C}$ の時）であるとする．このとき, f_A, g_B は共に等長写像であることを示せ．
7) $A \in M_m(K)$ とし, 4) で求めた f_A の表現行列を A' とする．A が正則であれば A' も正則であることを示せ．また, 同様に $B \in M_n(K)$ に対して, 5) で求めた g_B の表現行列を B' とすると, B が正則であれば B' も正則であることを示せ．
   ヒント：A' が正則であることが f_A のどのような（写像としての）性質に対応するか考えてみよ．
8) $A \in M_m(K)$, $B \in M_n(K)$ に対して, 4) で求めた f_A の表現行列を A', 5) で求めた g_B の表現行列を B' とすると $A'B' = B'A'$ が常に成り立つことを示せ．
   ヒント：$A'B' = B'A'$ が成り立つことが f_A と g_B のどのような（写像としての）性質に対応するか考えてみよ．

以下では $m = n$ とする．

9) $S = \{X \in V \mid X = {}^tX\}$ とする．S は V の K-部分線形空間であることを示し, 次元を求めよ．
10) S の正規直交基底を一組求め, さらにそれを含む（拡大となっている）V の正規直交基底を一組求めよ．
11) S の直交補空間を求め, 簡潔に表せ．

（以上）