問１． $A \in M_{m,n}(K)$ とする．

1) $A = (a_1 \ \cdots \ a_n)$ と列ベクトルを用いて表す．$\mathrm{rank}\, A = k$ であることと，$a_1, \cdots, a_n$ から一次独立であるように選べるベクトルの最大の本数が k 本であることは同値であることを示せ．

2) ${}^tA = (b_1 \ \cdots \ b_m)$ と列ベクトルを用いて表す．$A = \begin{pmatrix} {}^tb_1 \\ {}^tb_2 \\ \vdots \\ {}^tb_m \end{pmatrix}$ としても同じである．$\mathrm{rank}\, A = k$ であることと，$b_1, \cdots, b_m$ から一次独立であるように選べるベクトルの最大の本数が k 本であることは同値であることを示せ．

問２． V, W, U を K-線型空間，$f: V \to W$，$g: W \to U$ をそれぞれ K-線型写像とする．f と g の合成 $g \circ f: V \to U$ は $v \in V$ に対して $g \circ f(v) = g(f(v))$ により定められているのであった．ここで，以下の問いに答えよ：

注意：1) から 5) では線型性は実は不要である．線型性を用いて解答してもよいが，用いない証明も考えてみよ．

1) $g \circ f$ が単射であれば f は単射であることを示せ．
2) $g \circ f$ が全射であれば g は全射であることを示せ．
3) f, g が共に単射であれば $g \circ f$ も単射であることを示せ．
4) f, g が共に全射であれば $g \circ f$ も全射であることを示せ．
5) f, g が共に全単射であれば $g \circ f$ も全単射であることを示せ．
6) f は単射であるが，$g \circ f$ は単射でないような線型写像の例を挙げよ．
7) g は全射であるが，$g \circ f$ は全射でないような線型写像の例を挙げよ．

以下では $V = K^n$，$W = K^m$，$U = K^l$ とする．このときには（標準基底に関して）f, g はそれぞれ $M_{m,n}(K)$，$M_{l,m}(K)$ の元 A, B を用いて表示することができた．

8) 1) と命題「$\mathrm{rank}\, BA = n$ であれば $\mathrm{rank}\, A = n$ である」は同値であることを示し，証明せよ．
9) 8) に倣って，2) と同値であるような BA と B に関する命題を述べ，証明せよ．

問３． V, W を計量線型空間，$\langle \cdot\,, \cdot \rangle_V$，$\langle \cdot\,, \cdot \rangle_W$ をそれぞれ V, W の内積とする．

1) $f: V \to W$ が内積を保つとする．すなわち，$\langle f(v_1), f(v_2) \rangle_W = \langle v_1, v_2 \rangle_V$ が任意の $v_1, v_2 \in V$ について成り立つとする．このとき f は K-線型写像であることを示せ．

   ヒント：$\| f(av_1 + bv_2) - (af(v_1) + bf(v_2)) \|^2$ を計算してみよ．

2) 二本のベクトルの成す角を計量から定める．$f: V \to W$ が計量を保てば角を保つことを示せ．

3) $V = \mathbb{R}^2$，$W = \mathbb{R}^2$ とし，ユークリッド計量を考える．線型写像 $f: V \to W$ が角を保ったとしても計量を保つとは限らない．このような例を挙げよ．また，一般に $V = \mathbb{R}^n$，$W = \mathbb{R}^m$ の場合にはどうか考えてみよ．

注意． $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が角を保ってもそれだけでは必ずしも線型写像とは限らない. たとえば, $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ 上でユークリッド計量を考えると, $\mathbb{C}$ から自分自身への写像 f が $z = x + \sqrt{-1}y$ のみの函数（正則函数）であれば f は角を保つ. 証明には函数や写像が（計量ではなく）角を保つことの定義などが必要になるのでここでは省略する.

問４． $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ に通常の内積を入れる.

1) $v, w \in \mathbb{R}^n$ について, $\langle v, w\rangle = ({}^t v)w$ であることを示せ.
2) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が行列 A で表されているとする. $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $g(v) = {}^t A v$ で定めると, $\langle f(v), w\rangle = \langle v, g(w)\rangle$ が任意の $v, w \in \mathbb{R}^n$ について成り立つことを示せ.
3) $v, w \in \mathbb{C}^n$ について, $\langle v, w\rangle = ({}^t v)\bar{w}$ であることを示せ.
4) $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ が行列 A で表されているとする. $g\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ を $g(v) = {}^t \bar{A} v$ で定めると, $\langle f(v), w\rangle = \langle v, g(w)\rangle$ が任意の $v, w \in \mathbb{C}^n$ について成り立つことを示せ.

問５． $\mathbb{C}^n$ に通常の内積を入れる. $\mathbb{R}^{2n}$ から $\mathbb{C}^n$ への写像 f を $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \sqrt{-1}x_2 \\ x_3 + \sqrt{-1}x_4 \\ \vdots \\ x_{2n-1} + \sqrt{-1}x_{2n} \end{pmatrix}$ として定める.

1) f は $\mathbb{R}$-線型同型写像であることを示せ.
2) $\alpha \in \mathbb{C}$ とする. $v \in \mathbb{R}^{2n}$ について, $g_\alpha(v) \in \mathbb{R}^{2n}$ を $f(w) = \alpha f(v)$ をみたす唯一の元として定める. すなわち, $g_\alpha(v) = f^{-1}(\alpha f(v))$ とおく. このとき, g_α は（$\mathbb{R}$-）線型同型写像であることを示し, 行列表示せよ.
3) $\mathbb{R}^{2n}$ にも通常の内積を入れる. 2) で定めた g_α が $\mathbb{R}^{2n}$ の内積を保つための α に関する必要十分条件を求めよ.
4) $\mathrm{Re}\,\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ が任意の $v, w \in \mathbb{R}^{2n}$ について成り立つことを示せ. ここで, 左辺は $\mathbb{C}^n$ の内積の実部, 右辺は $\mathbb{R}^{2n}$ の内積を表わす.

問６． $A \in M_n(K)$ のとき, $v, w \in K^n$ に対して $\langle v, w\rangle_A = {}^t v A w$ と定める.

1) 条件 $\forall v \in K^n, \langle v, w\rangle_A = 0 \ \Rightarrow w = 0$, が成り立つことと, A が正則であることは同値であることを示せ.
2) 条件 $\langle v, v\rangle_A = 0 \ \Rightarrow v = 0$, が成り立てば A は正則であることを示せ.
3) K^n に内積が与えられているとし, $g_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$ とおく. ここで $\{e_1, \cdots, e_n\}$ は K^n の標準基底とする. $G = (g_{ij})$ を g_{ij} 達を並べて得られる行列とすると, G は正則行列であることを示せ.
4) n 次正則行列 A であって, ある $w \in K^n$, $w \neq 0$ について $\langle w, w\rangle_A = 0$ となるものの例を $K = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{C}$ それぞれの場合に挙げよ.

問７． V を n 次元（$n>0$）K-線型空間とし, $\{v_1,\cdots,v_n\}$ を V の K 上の基底とする.

1) W を K-線型空間とする．任意の $w_1,\cdots,w_n \in W$ に対し, $f(v_i)=w_i$ をみたす K-線型写像 $f\colon V\to W$ が一意的に存在することを示せ.
2) V の双対空間 V^* は $V^*=\{f\colon V\to K \mid f$ は K-線型写像$\}$ で定まるのであった．条件 $\varphi_i(v_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$ をみたす $\varphi_i\in V^*$ が唯一存在することを示せ.
3) 2) の $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ について, $\{\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$ は V^* の K 上の基底であることを示せ.

問８．（問７も参照のこと.）V を K-線型空間, $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ を V の内積とし, $\{v_1,\cdots,v_n\}$ を V の K 上の基底とする.

1) $v\in V$ とする．$\psi_v\colon V\to K$ を $v'\in V$ に対して $\psi_v(v')=\langle v',v\rangle$ と定めると, $\psi_v\in V^*$ であることを示せ.
2) $\Psi\colon V\to V^*$ を $\Psi(v)=\psi_v$ で定める．$K=\mathbb{R}$ のとき Ψ は $\mathbb{R}$-線型写像であるが, $K=\mathbb{C}$ のときには Ψ は $\mathbb{C}$-線型写像ではないことを示せ.
3) $\psi_i\in V^*$ を $\psi_i=\Psi(v_i)=\psi_{v_i}$ として定める．$\{\psi_1,\cdots,\psi_n\}$ は V^* の K 上の基底であることを示せ.
4) $F\colon V\to V^*$ を $v\in V$ が $v=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i$ のとき, $F(v)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\psi_i$ と定める．F は K-線型同型写像であることを示せ.
5) 2) の Ψ と 4) の F について, $K=\mathbb{R}$ であれば任意の $v\in V$ に対して $F(v)=\Psi(v)$ であるが, $K=\mathbb{C}$ であればある $v\in V$ に対して $F(v)\neq\Psi(v)$ であることを示せ．（後半は $K=\mathbb{C}$ のとき（写像として）$F\neq\Psi$ ということを意味する.）

注意：問８は V と V^* は同型ではあるが, 計量や基底を用いないと同型写像がうまく作れないという事実を反映している.

問７（つづき）．

4) $v\in V$ とする．$\Phi_v\colon V^*\to K$ を $f\in V^*$ に対して $\Phi_v(f)=f(v)$ として定める．このとき, Φ_v は K-線型写像であることを示せ．したがって $\Phi_v\in V^{**}=(V^*)^*$ である.
5) $\Phi\colon V\to V^{**}$ を $\Phi(v)=\Phi_v$ として定める．Φ は K-線型同型写像であることを示せ.

注意：問７は V と V^{**} の間の同型写像は計量や基底を用いずに作れることを意味している.

しかし, 特別な場合には次のようなことが起きる：

問９． $\mathbb{R}^n$ にユークリッド計量を入れ, $\mathcal{E}=\{e_1,\cdots,e_n\}$ を標準基底とする．$\mathcal{E}$ は正規直交基底である．このとき, 問７.2) の φ_i と問８.3) の ψ_i は一致することを示せ.

問 10． $V = \{(a_n)_{n\geq 1} \,|\, a_i \in K\}$ とする．V は数列全体の成す空間である．
$a = (a_n), b = (b_n) \in V$, $\lambda \in K$ のとき, $a{+}b$（という名前の数列）を $(a{+}b)_n = a_n{+}b_n$, λa（という名前の数列）を $(\lambda a)_n = \lambda a_n$ により定めると, V は K-線型空間である．

1) $f\colon V \to K$ を $f(a) = (a$ の第 3 項$)$ と定めると, $f \in V^*$ であることを示せ．
2) $W = \left\{ a = (a_n) \in V \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} a_n \text{が存在する.} \right\}$ は V の部分線型空間であることを示せ．
3) $g\colon W \to K$ を $g(a) = \lim_{n\to\infty} a_n$ と定めると, $g \in W^*$ であることを示せ．（この g は全ての V の元に対しては定義できないことに注意.）

問 11． $V = K^n$, $a \in V$ とし, $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ を V の内積とする．$W_a = \{v \in V \,|\, \langle a, v\rangle = 0\}$ と定める．

1) $a \neq 0$ であれば $\dim W_a = n - 1$ であることを示せ．
2) $W_a = W_b$ となるための a, b の必要十分条件を求めよ．
3) $U \subset V^*$ を $U = \{f \in V^* \,|\, w \in W$ ならば $f(w) = 0\}$ と定めると, U は V^* の部分線型空間であることを示せ．
4) $\dim U = 1$ であることを示せ．
5) $f \in U$, $f \neq 0$ とする．このとき, $[f]\colon V/W \to K$ を $[f]([v]) = f(v)$ により定めることができて, $[f]\colon V/W \to K$ は線型同型写像であることを示せ（難しい）．

問 11. 5) のヒント：そもそも V/W は次のように定める．

定義． $v, v' \in V$ は $v - v' \in W$ の時同値であると言うことにし, $v \equiv v'$ と記す．部分線型空間の性質から, 次の 3 つの性質がしたがう．まず, $v = v'$ なら $v \equiv v'$ であるし, また, $v \equiv v' \Rightarrow v' \equiv v$ が成り立つ．そして, $v \equiv v'$, $v' \equiv v''$ ならば $v \equiv v''$ である．$[v]$ で v と同値であるような V の元すべての集合を表すことにする．$[v] = \{v + w \,|\, w \in W\}$ である．そして

$$V/W = \{[v] \,|\, v \in V\}$$

とおく．$[v] + [v'] = [v + v']$, $\lambda[v] = [\lambda v]$ とすれば V/W は K-線型空間となる．（表現は異なるが，ここまでは先学期の最後で述べた.）

$x \in V/W$ とすると, ある V の元 x を用いて $x = [v]$ と表すことができる．ここで $[f](x) = f(v)$ と定めたいが, $x = [v']$ とほかの元 $v' \in V$ を用いて表せるとすると, $f(v') = f(v)$ でなければ一貫性がなくなってしまいうまく定義できているとは言えない．逆に，「$(x =)[v] = [v'] \Rightarrow f(v) = f(v')$」が常に成り立つならば, $[f](x) = f(v)$ としても $[f](x) = f(v')$ としても同じ意味なので問題は起きない．「$[v] = [v']$ であれば $f(v) = f(v')$」を示すのに $f \in U$ を用いることができる．一方, 一旦 $[f]$ が線型写像として定まることがわかれば線型同型写像であることは比較的容易にわかる．

（以上）