２００７年度数学 II 演習（理 I）　　　　　　　　　　'07/10/29（月）４限

問１． $F = \left\{ f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R} \,\middle|\, \dfrac{x}{y} \in \mathbb{R}\ (y \neq 0) \Rightarrow f(x) = \dfrac{x}{y} f(y) \right\}$ とする．（f は特に線型写像であるとか, 連続函数であるとは仮定してしない.）

1) $f, g \in F$, $r \in \mathbb{R}$ に対して, 函数 $f+g$, $r.f$ をそれぞれ $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(rf)(x) = f(rx)$ として定める．すると F は $+$ を和, . を実数倍として $\mathbb{R}$-線型空間であることを示せ.
2) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ が $\mathbb{R}$-線型写像であれば $f \in F$ であることを示せ.
3) F の元で $\mathbb{R}$-線型写像でないものの例を挙げよ.
4) $z \in \mathbb{C}$ を $z = x + \sqrt{-1}y$, $x, y \in \mathbb{R}$ と表し, $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$ と定める. $\operatorname{Re}, \operatorname{Im}$ を $\mathbb{C}$ から $\mathbb{R}$ への写像とみなすとこれらは $\mathbb{R}$-線型写像であることを示せ.
5) 4) により $\operatorname{Re}, \operatorname{Im} \in F$ であるが, これらは $\mathbb{R}$ 上一次独立であることを示せ.
6) $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$ とする．函数 f_1 を $f_1(z) = \begin{cases} z/\alpha, & z/\alpha \in \mathbb{R} \\ 0, & z/\alpha \notin \mathbb{R} \end{cases}$ として定めると, $f_1 \in F$ であることを示せ.
7) 函数 g を $g(z) = \begin{cases} z, & z \in \mathbb{R}, \\ \sqrt{-1}z, & \sqrt{-1}z \in \mathbb{R}, \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$ として定めると $g \in F$ であることを示せ.
8) $n \in \mathbb{N}$ に対し, f_n を $f_n(z) = \begin{cases} z/\alpha^n, & z/\alpha^n \in \mathbb{R} \\ 0, & z/\alpha^n \notin \mathbb{R} \end{cases}$ として定める．$F_n = \langle f_0, f_1, \cdots, f_n \rangle$ は F の部分線型空間であることを示せ。
9) $\dim F_5$ を求めよ（α によって異なる）．

問２． $a, b, c \in \mathbb{R}$ とし, $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, ax + by + cz = 0 \right\}$ とする.

1) P は $\mathbb{R}^3$ の部分線形空間であることを示せ.
2) P の基底を一組求め, 次元を求めよ.
3) $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を, $\pi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で定める．$\pi(P)$ を決定し, $\dim \pi(P)$ を求めよ.

定義． $f\colon V \to W$ を写像とする．V の部分集合 U に対して, U の（f による）像 $f(U)$ を

$$f(U) = \{ w \in W \mid \exists u \in U, w = f(u) \} = \{ f(u) \mid u \in U \}$$

と定める．また, W の部分集合 X に対して, X の（f による）逆像 $f^{-1}(X)$ を

$$f^{-1}(X) = \{ v \in V \mid f(v) \in X \}$$

と定める.

問3． f が全単射であると仮定し, f の逆写像を f' で表す. このとき上の定義による $f^{-1}(X)$ と, $f'(X)$ は一致することを示せ.
※ したがって, f が全単射であろうが無かろうが $f^{-1}(X)$ という集合は混乱なく定まる.

問4． $f\colon V \to W$ を線型写像とする.

1) $U \subset V$ が部分線形空間であれば $f(U)$ は W の部分線形空間であることを示せ.
2) $X \subset W$ が部分線形空間であれば $f^{-1}(X)$ は V の部分線形空間であることを示せ.
3) U を V の部分線形空間とする. $v_1, \cdots, v_r \in U$ が U を生成するとき, $f(v_1), \cdots, f(v_r)$ は $f(U)$ を生成することを示せ.
4) f が単射であることと, 一次独立であるような V の元の組 $v_1, \cdots, v_r$ について常に $f(v_1), \cdots, f(v_r)$ が一次独立であることは同値であることを示せ.
5) f が全射であることと, V の元の組 $v_1, \cdots, v_r$ であって $f(v_1), \cdots, f(v_r)$ が W を生成するようなものが存在することは同値であることを示せ.
6) $v_1, \cdots, v_r \in V$ は一次独立ではないが, $f(v_1), \cdots, f(v_r)$ は一次独立であるような f, V, W の例を挙げよ.
7) $v_1, \cdots, v_r \in V$ は一次独立であるが, $f(v_1), \cdots, f(v_r)$ は一次独立ではないような f, V, W の例を挙げよ.
8) $v_1, \cdots, v_r \in V$ は V を生成しないが, $f(v_1), \cdots, f(v_r)$ は W を生成するような f, V, W の例を挙げよ.
9) $v_1, \cdots, v_r \in V$ は V を生成するが, $f(v_1), \cdots, f(v_r)$ は W を生成しないような f, V, W の例を挙げよ.

問5． $A \in M_n(K)$ のとき, $f_A\colon K^n \to K^n$ を

$$f_A(v) = Av, \ (v \in K^n)$$

で定める. $A, B \in M_n(K)$ が $A + B = E_n$, $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B = n$ を満たすとき以下を示せ.

1) $\operatorname{Ker} f_A = \operatorname{Im} f_B$.
2) $AB = BA = O, \quad A^2 = A, \quad B^2 = B$.

問6． 線型空間 V から V 自身への線型写像 $P_1, \ldots, P_k$ が条件

1) $P_j^2 = P_j$, $j = 1, \ldots, k$
2) $P_j P_k = 0$, $j \neq k$
3) $P_1 + \cdots + P_k = \mathrm{id}_V$

をみたすとき，$W_j = \operatorname{Im} P_j$ とすると，$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ が成り立つことを示せ.
ただし，3) の左辺は $f(v) = P_1(v) + \cdots + P_k(v)$ で定まる線型写像を表す.

（以上）