問１． $V = \{X \in M(2;\mathbb{R}) \,|\, \mathrm{tr}X = 0\}$ とする．ここで, 一般に $X = (x_{ij}) \in M(n;K)$ のとき $\mathrm{tr}X = \sum_{i=1}^{n} x_{ii} \in K$ である．

1) V は行列の加法, 実数倍により $\mathbb{R}$-線型空間となることを示せ．
2) A を二次の正則な行列とする．$X \in V$ に対して $f_A(X) = AXA^{-1}$ と定めると f_A は V から V への $\mathbb{R}$-線型写像であることを示せ．
   ※ そもそも $f_A(X) \in V$ かどうか確かめないといけないことに注意．
3) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と定めると, V の元 X は $X = aE + bF + cG$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ と一意的に表せることを示せ．また, $\mathbb{R}^3$ から V への写像 φ を $\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xE + yF + zG$ と定めると, φ は $\mathbb{R}$-線型同型写像であることを示せ．
4) A を二次の正則行列とする．$\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 g_A を次のように定める：

   f_A を 2) のように定め, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して, $f_A(xE+yF+zG) = aE+bF+zG$

   と表して, $g_A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ と置く．

   このとき, g_A を f_A, φ, φ^{-1} で表せ．また, g_A は $\mathbb{R}$-線型写像であることを示し, 行列表示せよ．

問２． V を K-線型空間（$K = \mathbb{R}$ または $K = \mathbb{C}$）とし, V_1 を $v_1, \cdots, v_r \in V$ で生成される K-部分線型空間, V_2 を $w_1, \cdots, w_s \in V$ で生成される K-部分線形空間とする．このとき, $v_1, \cdots, v_r, w_1, \cdots, w_s$ が生成する部分空間は $V_1 + V_2$ に等しいことを示せ．

問３． V を K-線型空間とし, V_1, V_2 をそれぞれ V の K-部分線形空間とする．W が V の K-線型部分空間であって, $W \supset V_1$, $W \supset V_2$ であるとすると, $W \supset V_1 + V_2$ であることを示せ．

注意． 問３の意味で $V_1 + V_2$ は V_1, V_2 を含む最小の部分線型空間である．一方, $V_1 \cap V_2$ は V_1, V_2 に共通して含まれる最大の部分線型空間である．

問４． $\psi : K^n \to K^m$ を K-線型写像とし, $\Gamma = \{(v, \psi(v)) \,|\, v \in K^n\}$ とする．ここで, $v \in K^n$ のとき, $(v, \psi(v))$ は形式的に v と $\psi(v)$ を並べて書いたものである．

1) $(v, \psi(v))$, $(u, \psi(u))$ をそれぞれ Γ の元, λ を K の元とするとき,

$$(v, \psi(v)) + (u, \psi(u)) = (v + u, \psi(v) + \psi(u)),$$
$$\lambda(v, \psi(v)) = (\lambda(v), \lambda\psi(v))$$

   と定めると Γ は K-線型空間になることを示せ．

2) $\pi:\Gamma\to K^n$ を $\pi(v,\psi(v))=v$ と定めると, π は K-線型同型写像である. このことを示し, また π^{-1} を具体的に与えよ.

問5． $K=\mathbb{R}$ または $K=\mathbb{C}$ とする.

1) $f\colon K^n\to K^m$, $g\colon K^m\to K^l$ をそれぞれ K-線型写像とする. このとき $\mathrm{Ker}\,f$ は $\mathrm{Ker}\,(g\circ f)$ の K-部分線型空間であることを示せ. また, $\mathrm{Ker}\,f=\mathrm{Ker}\,(g\circ f)$ であることと, $\mathrm{Im}\,f\cap\mathrm{Ker}\,g=\{0\}$ であることは同値であることを示せ.
2) $f\colon K^n\to K^m$ を K-線型写像とする. K^n の部分空間 V であって, $V\oplus\mathrm{Ker}\,f=K^n$ となるものが存在するとする（実は常に存在する. このことは後期に扱う). V は K^n の部分空間であるから, $v\in V$ を $v\in K^n$ とみなして $f(v)$ を考えることができる. このようにして得られた V から K^m への線型写像を $f|_V$ と表す. すると, $\mathrm{Im}\,f|_V=\mathrm{Im}\,f$ であって, $f|_V\colon V\to\mathrm{Im}\,f$ は K-線型同型写像であることを示せ.

問6． $K=\mathbb{R}$ または $K=\mathbb{C}$ とする.

1) $A\in M(3;\mathbb{R})$ とする. A の各列を $\mathbb{R}^3$ のベクトルとみなし, a_1,a_2,a_3 とする. a_1, a_2, a_3 が生成する $\mathbb{R}^3$ の部分空間の表す図形と, $\mathrm{rank}\,A$ の関係を調べよ.
※ $\mathbb{R}$ を $\mathbb{C}$ に置き換えても, $\mathbb{C}^3$ の部分空間の表す図形を大らかに「点」「直線」「平面」「空間」と考えてしまえば本質的には全く同様である.
2) V を K-線型空間とする. $f_1,\cdots,f_r\in V^*$ が生成する V^* の部分空間を W とする. V の部分集合 $U=\{v\in V\,|\,\forall f\in W,\ f(v)=0\}$ は V の部分線型空間である, より詳しく, $U=\mathrm{Ker}\,f_1\cap\mathrm{Ker}\,f_2\cap\cdots\cap\mathrm{Ker}\,f_r$ であることを示せ.
3) $v_1,\cdots,v_r\in K^n$ とし, $v_1,\cdots,v_r$ が生成する部分線型空間を V とする. $v\in K^n$ について, $v_1,\cdots,v_r,v$ が生成する部分線型空間を $V\langle v\rangle$ と表すことにする. $V\langle v\rangle=V$ であることと, $\mathrm{rank}\,(v_1\ \ v_2\ \ \cdots\ \ v_r\ v)=\mathrm{rank}\,(v_1\ \ v_2\ \ \cdots\ \ v_r)$ であることは同値であることを示せ.
4) $v_1,\cdots,v_r,w_1,\cdots,w_s\in K^n$ とする. V を $v_1,\cdots,v_r$ が生成する部分線型空間, W を $w_1,\cdots,w_s$ が生成する部分空間とする. $V\cap W\neq\{0\}$ であるが, 任意の i,j について $v_i\notin V\cap W$, $w_j\notin V\cap W$ であるような例を挙げよ.
5) 4) の記号をそのまま用いることとし, $A=(v_1\ \cdots\ v_r)$, $B=(w_1\ \cdots\ w_s)$ と置く. $V=W$ であることと, 任意の j について $w_j=Ax$, $x\in K^r$ が解を持ち, かつ, 任意の i について $v_i=By$, $y\in K^s$ が解を持つことは同値であることを示せ. 言い換えれば, $V=W$ であることと, ある $X\in M(r,s)$, $Y\in M(s,r)$ が存在して $B=AX$, $A=BY$ が成り立つことと同値であることを示せ.
もし加えて $n=r=s$ であって, A または B の少なくとも一方が正則行列であるならば, A, B は共に正則行列であって, $Y=X^{-1}$ であることを示せ.

（以上）