２００７年度数学 II 演習（理 I）　　　　　　　　　　　　　　　　　　'07/7/9（月）４限

問１． V を $\mathbb{R}$-線型空間とし, f を $\mathbb{R}^3$ から V への $\mathbb{R}$-線型写像とする.

$$x = f\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ y = f\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ z = f\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とするとき,

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を求めよ.

問２． 正整数 n を固定し, $P^n[X]$ で高々n 次の X に関する実多項式全体を表す：

$$P^n[X] = \left\{a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \,\middle|\, a_i \in \mathbb{R}\right\}.$$

ここで, $f\colon P^n[X] \to P^n[X]$ を

$$f(p(X)) = X\frac{d^2}{dX^2}p(X) - 2\frac{d}{dX}p(X)$$

として定める.

1) f の定義に従って $f(2X^2+5X+2)$ を計算し, $f(2X^2+5X+2) = -4X-10$ であることを確かめよ.
2) f は $\mathbb{R}$-線形写像であることを示せ.
3) f の像と核を求めよ.
4) $P[X]$ で X に関する多項式全体を表す：

$$P[X] = \left\{a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0,\ a_i \in \mathbb{R}\right\}.$$

   f を最初と同じ式で定めると $f\colon P[X] \to P[X]$ は $\mathbb{R}$-線型写像であることを示せ.
5) 4) の f の像と核を求めよ.

問３．

1) $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を $\mathbb{R}$-線型写像とするとき, $V = \{v \in \mathbb{R}^n \mid f(v) = g(v)\}$ は $\mathbb{R}^n$ の部分線型空間であることを示せ.
2) $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ とし, $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \neq (0, 0)$ とする.

$$V = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a_1x + a_2y = 0\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, b_1x + b_2y = 0\right\}$$

   と置く. V を図示し, $\mathbb{R}^2$ の部分線型空間であるかどうか調べよ.

3) 2) の記号をそのまま用いる.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a_1x + a_2y = 0 \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, b_1x + b_2y = 0 \right\}$$

と置く. W を図示し, $\mathbb{R}^2$ の部分線型空間であるかどうか調べよ.

4) 有理数全体を $\mathbb{Q}$ で表す. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ であるが, $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ の $\mathbb{R}$-線型部分空間ではないことを示せ.

問4. $r, \theta, \phi \in \mathbb{R}$ とする. 行列

$$\begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\cos\theta & -r\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi\sin\theta & -r\sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi & r\cos\phi & 0 \end{pmatrix}$$

で定まる $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への $\mathbb{R}$-線形写像が単射であるための r, θ, ϕ の条件を与えよ。

問5. $V = \mathbb{R}^n$ とし, V^* をその双対空間とする（前回の問題を参照）.

1) $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線型写像は $(m \times n)$-行列を用いて一意的に表されるのであった. したがって V^* の元は $(1 \times n)$-行列, 即ち n 次行ベクトルで一意的に表される. このことを直接（例えば講義での $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線型写像の場合の証明を真似して）示せ.

2) 上のように V^* の元を n 次行ベクトルで表す操作を写像 $V^* \to M(1, n)$ とみなして φ で表す. $M(1, n)$ に行列の和, 行列の実数倍により加法・実数との積を定めると, φ は線型同型写像であることを示せ.

3) より一般に, $W = \{f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \mid f$ は線型写像$\}$ とする. V の元の和, 実数倍を双対空間の場合を真似て定義し, その演算で V が線型空間となることを示せ.

4) $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線型写像を行列で表す操作を写像 $W \to M(m, n)$ とみなして ψ で表す. $M(m, n)$ に行列の和, 行列の実数倍により加法・実数との積を定めると, ψ は線型同型写像であることを示せ.

問6. A を $(m \times n)$-行列, B を $(n \times m)$-行列とする. $AB = E_m$, $BA = E_n$ であれば $n = m$ であって, $B = A^{-1}$ であることを示せ.

問7. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}$-線型写像とする. このとき f の像 $\operatorname{Im} f$ と核 $\operatorname{Ker} f$ が取りうる図形の組み合わせを全て挙げよ.
ヒント：要は $w = f(v)$ がどのような w についてどのくらい解を持つかということである.

問8. $V = \{X$ を変数とする複素数係数の多項式$\}$ とし, $z_0 \in \mathbb{C}$ を固定する. $\varphi\colon V \to \mathbb{C}$ を $f \in V$ について $\varphi(f) = f(z_0)$ とするとき, $\operatorname{Im}\varphi$ と $\operatorname{Ker}\varphi$ を求めよ.
ヒント：複素数だと混乱する場合にはまず全て実数の場合に考えてみよ.

（以上）