２００７年度数学 II 演習（理 I）　　　　　'07/5/14（月）４限

問１． 以下の連立一次方程式を解け（解が存在するかどうか判定し，存在するなら全て求め，存在しないならばそのことを示せ）．

1) $\begin{cases} 3a-b-c+d=0, \\ 2a+2b+2c-d=-7, \\ a-2b+c-d=5, \\ 2a-3b-2c+d=6. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+3y-z=-3, \\ x+2y-2z+3w=1, \\ 3x-2y+3z-w=-2, \\ x-3y+2z=-3. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1-x_2-x_3-5x_4=11, \\ x_1-3x_2-3x_3+x_4=1, \\ x_1-2x_2+x_3-3x_4=5, \\ 2x_1-3x_2-2x_3-2x_4=6. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+2x_2+2x_3=1, \\ x_1+3x_2+(3+t)x_3=1, \end{cases}$
ただし t は実定数とする．

問２．

1) 正則行列 A は左右の基本変形を繰り返すと単位行列に変形できるが，実際には左基本変形のみで変形できるのであった．A を単位行列に変形するための左右の基本変形の施し方（どの変形をどの順番で施すか）が分かっているとき，これから左基本変形のみで（A を単位行列に）変形するための左基本変形の施し方を見出すことができる．このことを証明せよ．

2) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする．1) をふまえて，まず左右の基本変形を共に１回以上用いて A を単位行列に変形し，その変形の施し方から左基本変形のみで A を単位行列に変形する方法を見出せ．

問３． $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ を $(m\times n)$-行列, $w=\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^m$ とし，$v=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$ に関する一次方程式 $w=Av$ を考える．

1) A の第 i 列と第 j 列を入れ替えて A' に変形したとする．（ただし $i\neq j$ とする．）このとき $w=A'v$ は元の方程式 $w=Av$ において x_i と x_j を入れ換えたものであることを示せ．

2) A の第 i 列を λ 倍（ただし $\lambda\neq 0$）して A' に変形したとする．このとき $w=A'v$ は元の方程式 $w=Av$ において x_i を λx_i に置き換えたものであることを示せ．

3) A の第 i 列に第 j 列の μ 倍を加えて A' に変形したとする．（ただし $i\neq j$ とする．）このとき $w=A'v$ は元の方程式 $w=Av$ において x_j を μx_i+x_j に置き換えたものであることを示せ．

問４． 問３の操作 2), 3) それぞれについて右基本変形を用いて説明せよ．
ヒント:問３の 1) の操作は行列の右基本変形を用いて次のように説明できる．A を A' に変形する操作は，講義の記号を用いれば $A' = AQ(i,j)$ と定めることと同値である．したがって方程式 $w = A'v$ は $w = AQ(i,j)v$ と同値である．これは元の方程式において v を $Q(i,j)v$ に置き換えた方程式であるが，$Q(i,j)v$ は v の第 i 成分 x_i と第 j 成分 x_j を入れ換えたベクトル（行列）であるから，方程式 $w = A'v$ は方程式 $w = Av$ において x_i と x_j を入れ換えたものである．

問５． 問３の操作 1), 2), 3) のそれぞれについて，新たな方程式 $w = A'v$ の解と元の方程式 $w = Av$ の解との関係を述べよ．
注意：$w = Av$ は解を持つとは限らないので，そのような場合も気にする必要がある．

注意． 問５から分かるように，右基本変形を用いて方程式を変形した場合には左基本変形を用いた場合とは異なり，元の方程式の解が新たな方程式の解とならない場合がある．(逆に，新たな方程式の解が元の方程式の解とならない場合もある．）それでも両者の解には一定の関係があるので，場合によってはこのような操作も有用ではあるが，用いる場合には注意を要する．

問６．

1) $\mathbb{R}^2$ の部分集合 V を $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, ax + by = c \right\}$ と定める．ここで，a, b, c は実数とする．a, b, c の値によって V が表す $\mathbb{R}^2$ の図形がどのように変化するか調べよ．
ヒント：$ax + by = c$ の解の様子を調べると考えてみよ．大抵の場合は V は直線であるが，解が存在しないこともありうる．
2) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に関する連立一次方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

ただし, $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ は実数, は

1) 解が唯一存在する．
2) 解が無限に存在する．
3) 解が存在しない．

のいずれかを充たす．それぞれの場合について，$a_1x+b_1y = c_1$, $a_2x+b_2y = c_2$ が表す $\mathbb{R}^2$ 内の図形（V_1, V_2 とする）を調べ，また，V_1, V_2 の位置関係も調べよ．
注意：1) から分かるように，V_1, V_2 は直線であるとは限らない．また，2) の場合は他の場合より状況が少し複雑である．

（以上）