２００６年度数学 II（社学）演習　　　　　　　'06/6/21（水）１時限

問１． A を $(m\times n)$-行列とし, A の (i,j)-成分を a_{ij} とする. $v=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $w=\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ として, $x_1,\cdots,x_n$ に関する連立方程式

$$(*) \qquad Av=w,$$

即ち, $a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\cdots+a_{kn}x_n=c_k$, $k=1,\cdots,m$, を考える.

1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ が $(*)$ の解の一つであるとする．即ち, $u=\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ が $Au=w$ を満たすとする．今, v を $(*)$ の任意の解として, $t=v-u$ とおくと $t=\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$ は連立方程式

$$At=0,$$

即ち, $a_{k1}t_1+a_{k2}t_2+\cdots+a_{kn}t_n=0$, $k=1,\cdots,m$, の解であることを示せ.

2) A, u, w が上のように $Au=w$ を満たすとする．このとき, 1) とは逆に t が $At=0$ の解であるときに $v=t+u$ とおけば $Av=w$ であることを示せ.

※ このように, 方程式 $Av=w$ と方程式 $Av=0$ は（深く）関連する.

問２． A,B を正方行列とする.

1) ${}^t(AB)=({}^tB)({}^tA)$ であることを示せ.

2) A が可逆（正則）であるとき, $({}^tA)^{-1}={}^t(A^{-1})$ であることを示せ.
（この等しい行列を ${}^tA^{-1}$ とも表す.）

3) ${}^t(AB)^{-1}=({}^tA^{-1})({}^tB^{-1})$ であることを示せ. ただし, A, B は可逆（正則）であるとする.

問３． A を $(m\times n)$-行列とする.

1) $m<n$ であって, m 次正方行列 $A\,{}^tA$ が正則になるような (m,n) と A の例をいくつか挙げよ.

2) $m>n$ の時, m 次正方行列 $A\,{}^tA$ は決して正則にならないことを示せ.
ヒント：適当な m 次正則行列 T と n 次正則行列 S が存在して,

$$TAS=\widetilde{E}_r=\begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

が成り立つ. すると $A=T^{-1}\widetilde{E}_rS^{-1}$ なので, $A\,{}^tA=T^{-1}\widetilde{E}_rS^{-1}({}^tS^{-1}){}^t\widetilde{E}_r{}^tT^{-1}$ が成り立つ．ここで, もし $A\,{}^tA$ が可逆であれば, $TA\,{}^tA{}^tT$ も可逆である．一方, $S^{-1}({}^tS^{-1})$ をうまく区分けすると, $\widetilde{E}_rS^{-1}({}^tS^{-1}){}^t\widetilde{E}_r$ が可逆（正則）でないことがわかる.
注意：例えば直接 $A\,{}^tA$ の行列式を求めようとするのはあまり得策ではない.

（以上）