2022 年度幾何学 III 資料 1 v1 2022/11/11

・原則として講義の記号を用いる．

補題. $r \geq 1$ とし，$\omega \in \Omega^r(U),\ X_0, \ldots, X_r \in \mathfrak{X}(U)$ とすると

$$\begin{aligned}
&d\omega(X_0, \ldots, X_r) \\
&= \sum_{i=0}^{r} (-1)^i X_i \omega(X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_r) \\
&\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_r)
\end{aligned} \tag{1.1}$$

が成り立つ（$r = 0$ の場合には第二項は考えない）．ここで,「$\widehat{X_i}$」は X_i を取り除くことを意味する．

証明. まず $r = 1$ の場合に示す．$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$ と局所的に表す．また，X, Y をベクトル場とし，$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$，$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ と局所的に表す．すると，

$$\begin{aligned}
d\omega(X, Y) &= \sum_{i,j} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i(X, Y) \\
&= \sum_{i,j} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} (X_j Y_i - X_i Y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (X(f_i) Y_i - Y(f_i) X_i)
\end{aligned}$$

が成り立つ．一方，$[X, Y] = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_j} X_j - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} Y_j \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$ が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned}
X(\omega(Y)) &= X\left(\sum_{i=1}^{n} f_i Y_i \right) = \sum_{i=1}^{n} X(f_i) Y_i + \sum_{i=1}^{n} f_i X(Y_i), \\
Y(\omega(X)) &= Y\left(\sum_{i=1}^{n} f_i Y_i \right) = \sum_{i=1}^{n} Y(f_i) X_i + \sum_{i=1}^{n} f_i Y(X_i), \\
\omega([X, Y]) &= \sum_{i,j} f_i \left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_j} X_j - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} Y_j \right) = \sum_{i=1}^{n} f_i((X(Y_i) - Y(X_i))
\end{aligned}$$

が成り立つ．従って，$X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) = d\omega(X, Y)$ が成り立つ．さて，r 次以下の微分形式については主張が成り立つとする．ω を 1 形式，η を r 形式とし，$X_0, \ldots, X_{r+1}$

をベクトル場とする．すると，$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta - \omega \wedge d\eta$ が成り立つから，

$$
\begin{aligned}
&d(\omega \wedge \eta)(X_0, \dots, X_{r+1}) \\
&= \frac{1}{2!r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+1}} (\operatorname{sgn}\sigma) d\omega(X_{\sigma(0)}, X_{\sigma(1)}) \eta(X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(r+1)}) \\
&\quad - \frac{1}{1!(r+1)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+1}} (\operatorname{sgn}\sigma) \omega(X_{\sigma(0)}) d\eta(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r+1)}) \\
&= \frac{1}{2!r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+1}} (\operatorname{sgn}\sigma) (X_{\sigma(0)}(\omega(X_{\sigma(1)})) - X_{\sigma(1)}(\omega(X_{\sigma(0)})) - \omega([X_{\sigma(0)}, X_{\sigma(1)}])) \eta(X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(r+1)}) \\
&\quad - \frac{1}{1!(r+1)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+1}} (\operatorname{sgn}\sigma) \omega(X_{\sigma(0)}) \left(\sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} X_{\sigma(i)}(\eta(X_{\sigma(1)}, \dots, \widehat{X_{\sigma(i)}}, \dots, X_{\sigma(r+1)}) \right) \\
&\quad - \frac{1}{1!(r+1)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+1}} (\operatorname{sgn}\sigma) \omega(X_{\sigma(0)}) \left(\sum_{i,j} (-1)^{i+j} \eta([X_{\sigma(i)}, X_{\sigma(j)}], X_{\sigma(1)}, \dots, \widehat{X_{\sigma(i)}}, \dots, \widehat{X_{\sigma(j)}}, \dots, X_{\sigma(r+1)}) \right) \\
&= \frac{1}{1!r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+1}} (\operatorname{sgn}\sigma) X_{\sigma(0)}(\omega(X_{\sigma(1)}) \eta(X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(r+1)})) \\
&\quad - \frac{1}{2!r!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+1}} -\omega([X_{\sigma(0)}, X_{\sigma(1)}]) \eta(X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(r+1)}) \\
&\quad - \frac{1}{1!(r+1)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+1}} (\operatorname{sgn}\sigma) \omega(X_{\sigma(0)}) \left(\sum_{i,j} (-1)^{i+j} \eta([X_{\sigma(i)}, X_{\sigma(j)}], X_{\sigma(1)}, \dots, \widehat{X_{\sigma(i)}}, \dots, \widehat{X_{\sigma(j)}}, \dots, X_{\sigma(r+1)}) \right) \\
&= \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i X_i(\omega \wedge \eta(X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_{r+1})) \\
&\quad + \sum_{i,j} (-1)^{i+j} \omega \wedge \eta([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_{r+1})
\end{aligned}
$$

が成り立つ．一般には，$(r+1)$ 形式は局所的には 1 形式と r 形式の外積の和として表される[†1]．従って一般の $(r+1)$ 形式についても主張が成り立つ． □

問. $p \in M$，$v_0, \dots, v_r \in T_pM$ とする．$1 \leq i \leq r$ について，X_i を $X_i(p) = v_i$ を満たす，p の近傍 U で定義されたベクトル場とする．この時，式 (1.1) の右辺は X_i 達の選び方に依らないことを示せ.

※ 従って，$d\omega(v_0, \dots, v_r)$ は well-defined である.

[†1] 1 の分割を使えば，大域的に 1 形式と r 形式の外積の和として表すことができるが，補題を示すのにはそこまでは要らない．そもそも，ここでの計算は局所的なものなので大域的に表すことには意味がないし，また，例えば正則な（複素解析的な）微分形式を考える際など，1 の分割を使えない場面もある.

ヒント：X_i' 達を同様の性質をもつベクトル場とし，(1.1) の右辺を X_i 達を用いて計算したものと，X_i' 達を用いて計算したものを比較してみよ．$Y_i = X_i' - X_i$ とすると見やすい．

（以上）