

提出先：教養学部教務課前のレポートボックス

提出期間：2019/10/15（火）～2019/10/29（火）13:00

※ このファイルを **B4** サイズの用紙に縦向きに印刷し、レポート用紙とすること。紙面の大きさは B4 に設定されているが、プリンタの設定は各自で確認すること。なお、印刷が困難である場合には速やかに足助まで申し出ること。

学生証番号	氏名	共同作成者（ある場合）

以下では $K = \mathbb{R}$ あるいは $K = \mathbb{C}$ とするが、実際には K によらないので K は明示しない。

定義. $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ を計量線型空間（計量（内積）の定まった線型空間）とする。 $W \subset V$ を部分線型空間とすると、

$$W^\perp = \{v \in V \mid \forall w \in W, \langle w | v \rangle = 0\}$$

と置いて、 W の直交補空間と呼ぶ^{†1}。

直交補空間は V の部分線型空間である（このことは講義で扱う。ここでは認めて良い）。

※ 今回のレポートの解答にあたっては原則としては $K = \mathbb{C}$ としてエルミート計量（内積）を考えること。但し、解答に困難を感じる場合には $K = \mathbb{R}$ としても構わない（なお、うまく議論すれば、 $K = \mathbb{R}$ の場合でも $K = \mathbb{C}$ の場合でも見かけ上全く同一の解答で済む）。

問. $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ を計量線型空間（計量（内積）の定まった線型空間）とし、 f を計量を保つ V の線型変換とする。また、 $W \subset V$ を部分線型空間とする。

1) $W^\perp = \bigcap_{w \in W} \{v \in V \mid \langle w | v \rangle = 0\}$ が成り立つことを示せ。

2)

$$\begin{aligned} f(W) &= \{v \in V \mid \exists w \in W, v = f(w)\}, \\ f(W^\perp) &= \{v \in V \mid \exists u \in W^\perp, v = f(u)\} \end{aligned}$$

とする^{†2}。これらは V の部分線型空間である（このことは認めて良い）。さて、 f を計量を保つ、正則な（可逆な） V の線型変換とする。このとき、 $f(W^\perp) = f(W)^\perp$ が成り立つことを示せ。また、特に $f(W) = W$ が成り立つならば、 $f(W^\perp) = W^\perp$ が成り立つことを示せ。

※ 必要であれば演習の間 7.17 など参照のこと。なお、1) は特段 2) のヒントという訳ではない。

†1 直交補空間については 10/18 あるいは 10/25 の講義でも扱う予定である。

†2 $f(W)$, $f(W^\perp)$ はそれぞれ f による W , W^\perp の像である。一般に、線型写像 $f: V \rightarrow W$ について、 V の部分線型空間 U の f による像 $f(U)$ が（計量に関係なく）定まり、 W の部分線型空間である。これは線型写像の像の一般化である。

※ 参考文献がある場合には最後にまとめて箇条書きで示すこと。

※ 裏面を用いても良いが、表面の末尾にその旨示すこと。また、裏面を用いる際には表面と上下が同一になるように（左あるいは右綴じになるように）用いること。

※ 共同作成者に記載がないにもかかわらず、ほかのレポートとほぼ同一であるレポートが散見される。誰かと共同してレポートを作成することは構わないが、そのことは明記すること。それをしなければ剽窃であって、これは学術上の致命的な不正行為である。万一、写される側がそのことを承知していなかったことが露見した場合には重大な結果をもたらす可能性がある。

(以上)