2019 年度線型代数学演習（理 I 6,7,9,10 組向け，足助担当）演習問題 10 v5　　'19/12/3（火）
'19/11/29 :（v1）初版作成.
'19/12/1 :（v2）問を追加.
'19/12/4 :（v3）問 10.7 の誤植を修正.
'19/12/10 :（v4）問 10.8 を修正.
'19/12/18 :（v5）問 10.7 を再修正.

以下では $K=\mathbb{R}$ あるいは $K=\mathbb{C}$ とする．また，V を線型空間とし，$K=\mathbb{R}$ の場合には $\langle\cdot\mid\cdot,\rangle$ をユークリッド計量，$K=\mathbb{C}$ の場合には $\langle\cdot\mid\cdot,\rangle$ をエルミート計量とする．

問 10.1. $A\in M_n(\mathbb{R})$ とし，A の固有値は全て実数とする．A が $\mathbb{C}$ 上対角化可能ならば A は $\mathbb{R}$ 上対角化可能であることを示せ．

問 10.2. $(V,\langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ を計量線型空間とする．また，f を V の正規変換とする．このとき，V の任意の o.n.b. に関する f の表現行列は正規行列であることを示せ．

問 10.3 ***.** $(V,\langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ を計量線型空間とする．また，$\dim V=n$ とする．f を V の線型変換とすると，V の線型変換 f^* で，条件

$$\forall\, v,w\in V,\ \langle f^*(v)\mid w\rangle=\langle v\mid f(w)\rangle$$

が成り立つ物が一意的に存在することを示せ．f^* を f の**随伴変換**と呼ぶ．
ヒント：V の正規直交基底 $\mathscr{V}$ を一つ選び，f の $\mathscr{V}$ に関する表現行列を A とする．f^* を，$\mathscr{V}$ に関する表現行列が A^* であるような線型変換としてみよ．一意性に関しては，g も f の随伴変換であるとして $\|g(v)-f^*(v)\|^2$ を計算してみよ．g,f^* がいずれも随伴変換であることを用いれば複数の方法で計算ができて，この値が 0 に等しいことが従う．

問 10.4 ***.** $(V,\langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ を n 次元計量線型空間とし，f を V の線型変換とする．このとき，以下が成り立つことを示せ．

1) $(f^*)^*=f$ が成り立つ．
2) f が正則ならば $(f^{-1})^*=(f^*)^{-1}$ が成り立つ．

問 10.5 ***.** $(V,\langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ を計量線型空間とする．また，$\dim V=n$ とする．f を V の線型変換とするとき，f が正規変換であることは，$f^*\circ f=f\circ f^*$ が成り立つことと同値であることを示せ．
※ これが正規変換の本来の定義である．

問 10.6. $W\subset\mathbb{C}^n$ が部分線型空間である時，$W_A=\{v\in\mathbb{C}^n\mid \exists\, w\in W,\ v=Aw\}$ とする．

※ W_A はここでの記号である．

以下では $\mathbb{C}^n$ には標準的なエルミート計量が入っているとする．

1) $A \in M_n(\mathbb{C})$ をエルミート行列とする．このとき，$((W_A)^\perp)_A \subset W^\perp$ が成り立つことを示せ．
2) $A \in M_n(\mathbb{C})$ をユニタリ行列とする．このとき，$(W_A)^\perp = (W^\perp)_A$ が成り立つことを示せ．

問 10.7. $A, B \in M_n(K)$ について

$$\langle A \mid B \rangle = \operatorname{tr} A^* B$$

と定める．

1) $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ は $M_n(K)$ のユークリッド内積（$K = \mathbb{R}$ の場合）あるいはエルミート内積（$K = \mathbb{C}$ の場合）であることを示せ．
2) $D \in \mathrm{O}_n$（$K = \mathbb{R}$ の場合）あるいは $D \in \mathrm{U}_n$（$K = \mathbb{C}$ の場合）とすると，$\forall A, B \in M_n(K)$, $\langle DA \mid DB \rangle = \langle A \mid B \rangle$ が成り立つことを示せ．
3) $C \in \mathrm{O}_n$（$K = \mathbb{R}$ の場合）あるいは $C \in \mathrm{U}_n$（$K = \mathbb{C}$ の場合）とすると，$\forall A, B \in M_n(K)$, $\langle AC \mid BC \rangle = \langle A \mid B \rangle$ が成り立つことを示せ．
   ヒント：$X \in M_{m,n}(K)$, $Y \in M_{n,m}(K)$ について，$\operatorname{tr} XY$ と $\operatorname{tr} YX$ を比較してみよ．
4) $C \in M_n(K)$ とすると，$\forall A, B \in M_n(K)$, $\langle A \mid CB \rangle = \langle C^* A \mid B \rangle$
   及び $\forall A, B \in M_n(K)$, $\langle A \mid BC \rangle = \langle AC^* \mid B \rangle$ が成り立つことを示せ．

問 10.8. ここでは SO_3 の元をある程度決定する．$\mathbb{R}^3$ と，標準的なユークリッド計量を考える．さて，$A \in \mathrm{SO}_3$ とする．A の複素数の範囲での固有値を λ, μ, ν とする．

1) $|\lambda| = |\mu| = |\nu| = 1$ が成り立つことを示せ．また，$\lambda\mu\nu = 1$ が成り立つことを示せ．

一方，A の固有多項式は実 3 次多項式である．従って A の固有値を方程式は少なくとも一つの実数解を持つ．これを λ とすると，以下のいずれかが成り立つ．即ち，

i) μ, ν は実数ではなく，$\nu = \overline{\mu}$ が成り立つ．
ii) μ, ν はいずれも実数であって，それぞれ 1 か -1 に等しい．

2) いずれの場合にも λ, μ, ν のいずれかは 1 に等しいことを示せ．

そこで初めから $\lambda = 1$ として良い．すると，$v_1 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{o\}$ であって，$Av_1 = v_1$ が成り立つものが存在する．$V = \mathbb{R}v_1$ とする．このとき，$w \in V^\perp$ について $Aw \in V^\perp$ が成り立つ．そこで，$V^\perp$ の o.n.b. $\{v_2, v_3\}$ を $\det[v_1\ v_2\ v_3] = 1$ が成り立つように取る．$[Av_2\ Av_3] = [v_2\ v_3]B$ が成り立つように B を定める．

3) $B \in \mathrm{SO}_2$ が成り立つことを示せ．

ヒント：例えば次のように考えることができる．即ち，$\widetilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ とすると，

$$A[v_1\ v_2\ v_3] = [Av_1\ Av_2\ Av_3] = [v_1\ [v_2\ v_3]B] = [v_1\ v_2\ v_3]\widetilde{B}$$

が成り立つ．$A,\ [v_1\ v_2\ v_3] \in \mathrm{SO}_3$ だから，$\widetilde{B} \in \mathrm{SO}_3$ が成り立つ．よって ${}^t\widetilde{B}\widetilde{B} = \widetilde{B}{}^t\widetilde{B} = E_3$ が成り立つ．両辺を実際に計算して，右下の 2×2 の部分を比較してみよ．

ここで $\theta \in \mathbb{R}$ について $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ とする．

4)

$$\mathrm{SO}_2 = \{R(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

が成り立つことを示せ．

5) 次が成り立つことを示せ．

定理． $A \in \mathrm{SO}_3$ とする．このとき，$P \in \mathrm{SO}_3$ と $\theta \in \mathbb{R}$ が存在して，$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{bmatrix}$ が成り立つ．$P = [p_1\ p_2\ p_3]$ とし，x 軸，y 軸，z 軸の代わりに p_1 軸，p_2 軸，p_3 軸を考えると，A で表される $\mathbb{R}^3$ の線型変換は，p_1 軸を回転軸とした θ 回転である．

※ $P \in \mathrm{O}_3$ ではなく，$P \in \mathrm{SO}_3$ としているのは p_1 軸，p_2 軸，p_3 軸が右手系をなすようにしている．

次のように考えることもできる．$A \in \mathrm{SO}_3$ とする．A は正規行列なので，$P \in \mathrm{U}_3$ が存在して $P^{-1}AP$ は対角行列である．

6) $v_1 \in \mathbb{R}^3$，$v_2 \in \mathbb{C}^3$ と $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在して，$P = [v_1\ v_2\ \overline{v_2}]$ かつ $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & \overline{\lambda} \end{bmatrix}$ が成り立つ（これらが成り立つように v_1, v_2, λ が選べる）ことを示せ（$P \in \mathrm{U}_3$ でなければならないことに注意すること）．

7) 6) のように P を定め，$v_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(u + \sqrt{-1}w)$ と $u, w \in \mathbb{R}^3$ を用いて表す．$Q = [v_1\ u\ w]$ と置くと $Q \in \mathrm{SO}_3$ が成り立つことを示せ．また，$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & \\ & R(\theta') \end{bmatrix}$ がある $\theta' \in \mathbb{R}$ について成り立つことを示せ．また，このようにして得られる $R(\theta')$ と，定理の $R(\theta)$ は一致することを示せ．

問 10.9. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ とする．

1) $A \in \mathrm{SO}_3$ が成り立つことを示せ．

2) A の複素数の範囲での固有値を全て求めよ．特に，A は 1 を固有値に持つことを示せ．

3) $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底 (v_1, v_2, v_3) と $\theta \in \mathbb{R}$ であって，$P = [v_1\ v_2\ v_3]$ とすると，$\det P > 0$ かつ

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

が成り立つようなものを一組求めよ．

問 10.10 (必要に応じて微分積分学で扱った事実を用いて良い)．$x = (x_1, \ldots, x_n)$ を $\mathbb{R}^n$ の（標準的な）座標とする．$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を C^2 級とし，$Hf\colon \mathbb{R}^n \to M_n(\mathbb{R})$ を

$$Hf = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]$$

により定める（Hf は f の**ヘシアン**あるいは**ヘッセ行列**などと呼ばれる．なお，Hf はここでの記号である）．

1) $x \in \mathbb{R}^n$ について，$Hf(x)$ は実対称行列であることを示せ．
2) $o = {}^t[0\ 0\ 0]$ とする．また，$f(o) = 0$ かつ $Df(o) = {}^t[0\ \cdots\ 0]$ が成り立つとする．
   i) $\epsilon > 0$ が存在して，$\|x\| < \epsilon$ ならば $f(x) = {}^t x Hf(o) x + o(\|x\|^2)$ が成り立つことを示せ．ここで，$o(\|x\|)$ はいわゆる**ランダウの記号**である．知っていた方が良いのでここでは定義は敢えて述べない．知らなければ調べること．なお，ランダウの記号には O もある（例えば $O(\|x\|)$ などとして用いられる）．これについても合わせて調べること．
   ii) $n = 2$ とし，$Hf(o)$ は正則だとする．このとき，f の o の近く（正確には**近傍**と呼ばれる）での f のグラフを，$Hf(o)$ の正の固有値の数（$Hf(o)$ は正則としているので負の固有値の数も決まる）に従って大雑把に記述せよ．

（以上）