２０１９年度線型代数学演習（理 I 6,7,9,10 組向け，足助担当）演習問題 9 v1 '19/11/12（火）
'19/11/11 :（v1）初版作成．追って問を加える．

以下では $K=\mathbb{R}$ あるいは $K=\mathbb{C}$ とする．また，V を線型空間とし，$K=\mathbb{R}$ の場合には $\langle \cdot \mid \cdot, \rangle$ をユークリッド計量，$K=\mathbb{C}$ の場合には $\langle \cdot \mid \cdot, \rangle$ をエルミート計量とする．

問 9.1. $A\in M_n(\mathbb{R})$ とし，A の固有値は全て実数とする．A が $\mathbb{C}$ 上対角化可能ならば A は $\mathbb{R}$ 上対角化可能であることを示せ．

問 9.2. ここでは対角成分が $a_1,\dots,a_n$ であるような $M_n(K)$ の元を $\operatorname{diag}(a_1,\dots,a_n)$ で表す（比較的よく見かけるが，必ずしも一般的な記号ではない）．また，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ について $R(\alpha,\beta)=\begin{bmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}$ と置く（こちらは全く一般的な記号ではない）．

さて，$A\in M_n(\mathbb{R})$ とし，φ を A の固有多項式とする（変数は x とする）．

0) $\varphi\in\mathbb{R}[x]$ が成り立つことを示せ．また，λ を複素数の範囲での A の固有値とすると，$\overline{\lambda}$ も A の複素数の範囲での固有値であって，λ と $\overline{\lambda}$ の重複度は等しいことを示せ．
※ これは納得すれば良い．解答は不要である（誰かに聞いても分からなかったら慌てること）．

1) $v\in\mathbb{C}^n$ を λ に属する A の固有ベクトルとすると，$\overline{v}\in\mathbb{C}^n$ は $\overline{\lambda}$ に属する A の固有ベクトルであることを示せ．

2) λ を複素数の範囲での A の固有値とし，$V(\lambda)\subset\mathbb{C}^n$ を λ に属する A の固有空間とする．$V(\overline{\lambda})\subset\mathbb{C}^n$ を $\overline{\lambda}$ に属する A の固有空間とすると $\dim V(\lambda)=\dim V(\overline{\lambda})$ が成り立つことを示せ．

3) A は $\mathbb{C}$ 上対角化可能だとし，$P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ について $P^{-1}AP$ は対角行列だとする．このとき，必要なら P の列を入れ替えることにより，$\lambda_1,\dots,\lambda_r\in\mathbb{R}$ と，$\mu_1,\dots,\mu_s\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$，ただし $r+2s=n$，が存在して

$$P^{-1}AP=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_r,\mu_1,\overline{\mu_1},\mu_2,\overline{\mu_2},\dots,\mu_s,\overline{\mu_s})$$

が成り立つことを示せ．また，$v_1,\dots,v_r\in\mathbb{R}^n$ と，$w_1,\dots,w_s\in\mathbb{C}^n\setminus\mathbb{R}^n$ が存在して，

$$P=[v_1\ \cdots\ v_r\ w_1\ \overline{w_1}\ w_2\ \overline{w_2}\ \cdots\ w_s\ \overline{w_s}]$$

として良い（このように P が選べる）ことを示せ．

4) $v_1,\dots,v_r,w_1,\dots,w_s$ を 3) のように定める．$1\le j\le s$ について，$x_j,y_j\in\mathbb{R}^n$ を $x_j=(w_j+\overline{w_j})/2$，$y_j=(-w_j+\overline{w_j})/(2\sqrt{-1})$ と置くことにより定める．また，$\mu_j=\alpha_j+\sqrt{-1}\beta_j$，

$\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ と表す．$Q = [v_1 \ \cdots \ v_r \ x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ \cdots \ x_s \ y_s]$ とすると，$Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ であって，また，

$$Q^{-1}AQ = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \oplus R(\alpha_1, \beta_1) \oplus \cdots \oplus R(\alpha_s, \beta_s)$$

が成り立つことを示せ．

※ 右辺を A の**実標準形**あるいは実 Jordan 標準形と呼ぶことがある．実標準形は A が $\mathbb{C}$ 上対角化不可能な場合でも定まるが，ここでは A は $\mathbb{C}$ 上対角化可能なのでこのような形となる．また，「標準形」は Jordan 標準形（や対角行列）以外にも幾つかある．ここでは Jordan 標準形を単に標準形と呼んでいる．

Jordan 標準形 **

ここでは Jordan 標準形を**広義固有空間**（あとで定義する）を用いて構成する．ほかにも**単因子論**を用いる方法などがあるが，難しくなるのでここでは扱わない[†1]．以下ではここまでで扱った事柄（定理など）しか用いないが，全体的に慣れていないと大変なので後回しにして良い（例えばこの講義・演習が終わった後でも構わない．一方常微分方程式の講義を履修する，あるいは自習するのであれば，その前に済ませておいた方が無難である）．なお，ここでは最小限のこと（実際にはそれ未満）しか述べていないので，何らかの教科書で補うことが望ましい．

定理 (Jordan 標準形)．$A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．このとき，$P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ が存在して以下が成り立つ．まず，$N_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \in M_m(\mathbb{C})$ とする．$m = 1$ の場合には $N_1 = [0]$ とする．また，$J_m(\lambda) = \lambda E_m + N_m$ とする．

1) A の固有値が λ のみである場合．この場合には，正の整数 $k_1, \ldots, k_p$ であって，$k_1 + \cdots + k_p = n$（この n は λ の重複度である）を満たすものが存在して

$$P^{-1}AP = J_{k_1}(\lambda) \oplus \cdots \oplus J_{k_p}(\lambda)$$

が成り立つ．右辺を $J_{k_1,\ldots,k_p}(\lambda)$ で表すことにする．

2) 一般の場合．$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ を A の互いに相異なる固有値の全体とし，m_i を λ_i の重複度とする．各 i について，$p_i > 0$ と $k(i)_1, \ldots, k(i)_{p_i}$ が存在して

$$P^{-1}AP = J_{k(1)_1,\ldots,k(1)_{p_1}}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus J_{k(r)_1,\ldots,k(r)_{p_r}}(\lambda_r)$$

が成り立つ．

[†1] この講義では線型空間の元にかけることのできる数は $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ の元としているが，これを例えば $\mathbb{Z}$ の元とすると話が色々と変わってくる．単因子論はこのような状況では有効であるが，Jordan 標準形を構成するだけならば不要である．

いずれの場合にも，λ_i や $k(i)_j$ 達は並べ替えを除いて一意的に定まる．

以下ではこれを示す．
$N_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \in M_m(\mathbb{C})$ とする．$m=1$ の場合には $N_1 = [0]$ とする．また，$J_m(\lambda) = \lambda E_m + N_m$ とする．

問 9.3 (Jordan 標準形の特別な場合)．$A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．また，A の固有値は $\lambda \in \mathbb{C}$ のみだとする．このとき，$A_\lambda = A - \lambda E_n$ と置く．そして，$k \in \mathbb{N}$ について

$$W^{(k)} = \{v \in \mathbb{C}^n \mid {A_\lambda}^k v = o\}$$

と定める．ただし，${A_\lambda}^0 = E_n$ とする（従って $W^{(0)} = \{o\}$ である）．

1) A_λ の固有値は 0 のみであることを示せ．また，${A_\lambda}^n = O_n$ が成り立つことを示せ．
   ヒント：$P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ が存在して $P^{-1}AP$ は上三角行列である．
2) $k \in \mathbb{N}$ について，$W^{(k)} \subset W^{(k+1)}$ が成り立つことを示せ．また，$v \in W^{(k+1)}$ について $A_\lambda v \in W^{(k)}$ が成り立つことを示せ．
3) $W^{(n)} = W^{(n+1)} = \cdots = \mathbb{C}^n$ が成り立つことを示せ．
   ※ $k < n$ について $W^{(k)} = \mathbb{C}^n$ が成り立つかも知れないが，まだこのことは気にしていない．
4) $v \in W\ (k+1) \backslash W\ (k)$ が成り立つならば，$v, A_\lambda v, \ldots, {A_\lambda}^k v$ は線型独立であることを示せ．
   ヒント：$\lambda_0 v + \lambda_1 A_\lambda v + \cdots + \lambda_k {A_\lambda}^k v = o$ とする．${A_\lambda}^k$ を両辺にかけると $\lambda_0 {A_\lambda}^k v = o$ を得る．$v \notin W^{(k)}$ が成り立つから，${A_\lambda}^k v \neq o$ が成り立つから $\lambda_0 = 0$ が成り立つ．後は帰納法を用いて同様に議論すれば示せる．

ここで，$r \in \mathbb{N}$ を $W^{(r)} = \mathbb{C}^n$ が成り立つような最小の r とする．すると $r \geq 1$ が成り立つ．さて，$i_1 = \dim W^{(r)} - \dim W^{(r-1)} (= n - \dim W^{(r-1)})$ とする．また，$\{v_1, \ldots, v_k\}$ を $W^{(r-1)}$ の基底とし（従って $k = \dim W^{(r-1)}$ である），$\{v_1, \ldots, v_k, w_1^{(r)}, \ldots, w_{i_1}^{(r)}\}$ をこれを拡大して得られる $W^{(r)} (= \mathbb{C}^n)$ の基底とする．すると

$$W^{(r)} = \mathrm{Span}\{w_1^{(r)}, \ldots, w_{i_1}^{(r)}\} \oplus W^{(r-1)}$$

が成り立つ．特に $r=1$ ならば $W^{(1)} = \mathbb{C}^n$ であって，また，$W^{(0)} = \{o\}$ だから，$i_1 = n$ であって，また $\{w_1^{(1)}, \ldots, w_n^{(1)}\}$ は $\mathbb{C}^n$ の基底である．

5) $r = 1$ とする．$P = [w_1^{(1)}\ \cdots\ w_n^{(1)}]$ とすると $P^{-1}AP = \lambda E_n$ が成り立つことを示せ．従って，この場合には A は対角化可能である．

$r > 1$ とする．

6) $U^{(r-1)} = \mathrm{Span}\{A_\lambda w_1^{(1)}, \dots, A_\lambda w_{i_1}^{(1)}\} \subset W^{(r-1)}$ と置く．$U^{(r-1)} + W^{(r-2)}$ は直和であることを示せ．

7) $i_2 = \dim W^{(r-1)} - \dim W^{(r-2)} - \dim U^{(r-1)}$ と置く．$w_1^{(r-1)}, \dots, w_{i_2}^{(r-1)} \in W^{(r-1)}$ が存在して，

$$\begin{aligned} W^{(r-1)} &= \mathrm{Span}\{w_1^{(r-1)}, \dots, w_{i_2}^{(r-1)}\} \oplus U^{(r-1)} \oplus W^{(r-2)} \\ &= \mathrm{Span}\{w_1^{(r-1)}, \dots, w_{i_2}^{(r-1)}, A_\lambda w_1^{(r)}, \dots, A_\lambda w_{i_1}^{(r)}\} \oplus W^{(r-2)} \end{aligned}$$

が成り立つことを示せ．従って，

$$\mathbb{C}^n = \mathrm{Span}\{w_1^{(r)}, \dots, w_{i_1}^{(r)}, A_\lambda w_1^{(r)}, \dots, A_\lambda w_{i_1}^{(r)}, w_1^{(r-1)}, \dots, w_{i_2}^{(r-1)}\} \oplus W^{(r-2)}$$

が成り立つ．

以下，この作業を繰り返して $k \geq 2$ について，$\{A_\lambda^l w_j^{(m)}\}$，$1 \leq j \leq i_{r-m+1}$，$k \leq m \leq r$，$0 \leq l \leq m-k$ であって，これらは線型独立かつ

$$\mathbb{C}^n = \mathrm{Span}\{A_\lambda^l w_j^{(m)}\}_{\substack{1 \leq j \leq i_{r-m+1} \\ k \leq m \leq r \\ 0 \leq l \leq m-k}} \oplus W^{(k-1)}$$

が成り立つような $\mathbb{C}^n$ の元を得たとする（例えば $k = r-2$ ならば考えている元は

$$\begin{aligned} &w_1^{(r)}, \dots, w_{i_1}^{(r)}, A_\lambda w_1^{(r)}, \dots, A_\lambda w_{i_1}^{(r)}, A_\lambda^2 w_1^{(r)}, \dots, A_\lambda^2 w_{i_1}^{(r)}, \\ &w_1^{(r-1)}, \dots, w_{i_2}^{(r-1)}, A_\lambda w_1^{(r-1)}, \dots, A_\lambda w_{i_2}^{(r-1)}, \\ &w_1^{(r-2)}, \dots, w_{i_3}^{(r-2)} \end{aligned}$$

である）．

8) i_{r-m+1} を $\dim W^{(p)}$，$m-1 \leq p \leq r$ を用いて表せ．

9) $\{A_\lambda^{l+1} w_j^{(m)}\}$，$1 \leq j \leq i_{r-m+1}$，$k \leq m \leq r$，$0 \leq l \leq m-k$ は線型独立であることを示せ．

10) $w_1^{(k-1)}, \dots, w_{i_{r-k+2}}^{(k-1)}$ が存在して $\{A_\lambda^l w_j^{(m)}\}$，$1 \leq j \leq i_{r-m+1}$，$k-1 \leq m \leq r$，$0 \leq l \leq m-k+1$ は線型独立かつ，

$$\mathbb{C}^n = \mathrm{Span}\{A_\lambda^l w_j^{(m)}\}_{\substack{1 \leq j \leq i_{r-m+1} \\ k-1 \leq m \leq r \\ 0 \leq l \leq m-k+1}} \oplus W^{(k-2)}$$

が成り立つことを示せ．

従って，（$W^{(0)} = \{o\}$ なので）帰納的に $\mathbb{C}^n$ の基底

$$\{A_\lambda^l w_j^{(m)}\},\ 1 \leq j \leq i_{r-m+1},\ 1 \leq m \leq r,\ 0 \leq l \leq m-1$$

が得られる．これらを次の規則に従って並べて得られる行列を P とする：

i) l は $m-1$ から 0 まで減少する．

ii) j は 1 から i_{r-m+1} まで増加する．

iii) m は r から 1 まで減少する．

iv) ただし，まず m を固定し，次に j を固定する．その上で l を減少させる $l=0$ の次は（いわば「繰り上がり」の要領で）j を増加させた上で $l=m-1$ とする．j が既に i_{r-m+1} であって，その次の値がない場合には m を減少させ，j は 1 に戻す（やはり「繰り上がり」の要領である．

模式的には

$$P=[A_\lambda^{(r-1)}w_1^{(r)}\ \cdots\ w_1^{(r)}\ A_\lambda^{(r-1)}w_2^{(r)}\ \cdots\ w_2^{(r)}\ \cdots A_\lambda^{(r-1)}w_{i_1}^{(r)}\ \cdots\ w_{i_1}^{(r)}\ \cdots\ w_1^{(1)}\ \cdots\ w_{i_r}^{(1)}]$$

である（更に $r=3$，$i_1=2$，$i_2=3$，$i_3=1$ とするならば

$$P=[A_\lambda^2w_1^{(3)}\ A_\lambda w_1^{(3)}\ w_1^{(3)}\ A_\lambda^2w_2^{(3)}\ A_\lambda w_2^{(3)}\ w_2^{(3)}\ A_\lambda w_1^{(2)}\ w_1^{(2)}\ A_\lambda^2 w_2^{(2)}\ \ w_2^{(2)}\ A_\lambda w_3^{(2)}\ w_3^{(2)}\ w_1^{(1)}]$$

である）．ここで，$X\in M_n(\mathbb{C})$ について $X^{\oplus k}=\overbrace{X\oplus\cdots\oplus X}^{k\text{ 個}}$ と置く．

11)

$$P^{-1}A_\lambda P=N_r^{\oplus i_1}\oplus N_{r-1}^{\oplus i_2}\oplus\cdots\oplus O_{i_r}$$

が成り立つことを示せ．

※ 最後の O_{i_r} は $N_1^{\oplus i_r}$ である．

12)

$$P^{-1}AP=J_r(\lambda)^{\oplus i_1}\oplus J_{r-1}(\lambda)^{\oplus i_2}\oplus\cdots\oplus\lambda E_{i_r}$$

が成り立つことを示せ．

※ 最後の λE_{i_r} は $J_1(\lambda)^{\oplus i_r}$ である．右辺を A の **Jordan 標準形**，各 $J_m(\lambda)$ を **Jordan block** あるいは Jordan cell と呼ぶ．

13) 逆に $Q\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ が存在して $Q^{-1}AQ$ は Jordan 標準形であるとする．このとき，$W^{(k)\prime}=\{v\in\mathbb{C}^n\mid {A_\lambda}^k v=o\}$ とし，上と同様に r'，$i'_1,\ldots,i_{r'}$ を定めると，これらはそれぞれ $W^{(k)}$，r，$i_1,\ldots,i_r$ に等しいことを示せ．また，$Q^{-1}AQ$ は Jordan block の並び替えを除いて $P^{-1}AP$ に等しいことを示せ．

一般には $A\in M_n(\mathbb{C})$ の固有値は必ずしも λ のみとは限らない．そこで，まず以下のように定める．λ が A の固有値である時，$A_\lambda=A-\lambda E_n$ と置く．

定義 9.4. $\lambda\in\mathbb{C}$ を A の固有値とする．

$$W_\lambda=\{v\in\mathbb{C}^n\mid\exists k\in\mathbb{N},\ {A_\lambda}^k v=o\}$$

と定め，λ に属する A の**広義固有空間**あるいは**一般固有空間**と呼ぶ．ただし，$X \in M_n(\mathbb{C})$ について $X^0 = E_n$ と定める．

問 9.5. $v \in W_\lambda$ ならば $Av \in W_\lambda$ が成り立つことを示せ．
ヒント：$A_\lambda A = AA_\lambda$ が成り立つ．

問 9.6. λ を A の固有値とする．$v \in W_\lambda$，$v \neq o$ ならば，$k \in \mathbb{N}$，$k \geq 1$ が存在して，${A_\lambda}^{k-1}v \neq o$ かつ ${A_\lambda}^k v = o$ が成り立つことを示せ．

問 9.7.

1) λ, μ を異なる A の固有値とする．この時，$W_\lambda \cap W_\mu = \{o\}$ が成り立つことを示せ．
ヒント：$v \in W_\lambda \setminus \{o\}$ とし，${A_\lambda}^k v = o$ とする．$v \in W_\mu$ も成り立つとし，$w = {A_\mu}^{l-1}v \neq o$，${A_\mu}^l v = o$ とする．すると ${A_\lambda}^k w = o$ および $Aw = \mu w$ が成り立つ．
2) $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ を A の互いに相異なる固有値とする．このとき $W_{\lambda_1} + \cdots + W_{\lambda_r}$ は直和であることを示せ．
ヒント：例えば r に関する帰納法で示せる．$r = 1$ ならば何も示すことはない．$r = s$ まで主張が成り立つとし，$v_i \in W_{\lambda_i}$，$1 \leq i \leq s+1$ とする．${A_{\lambda_{s+1}}}^k v_{s+1} = o$ とすると，${A_{\lambda_{s+1}}}^k v_i \in W_{\lambda_i} \cap W_{\lambda_{s+1}}$ が $1 \leq i \leq s$ について成り立つ．

問 9.8. λ を A の固有値，m を λ の重複度とすると $\dim W_\lambda = m$ が成り立つことを示せ．また，$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ を A の互いに相異なる固有値の全体とすると，$\mathbb{C}^n = W_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus W_{\lambda_r}$ が成り立つことを示せ．
ヒント：前半については A を三角化してみよ．後半は前半から従う．

問 9.9 (一般の Jordan 標準形)．$A \in M_n(\mathbb{C})$ とすると，$P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ が存在して $P^{-1}AP$ は Jordan 標準形であることを示せ．また，Jordan 標準形は Jordan block の並べ替えを除いて一意的であることを示せ．
ヒント：後半は例えば問 9.3 の 13) を参考にしてみよ．

（以上）