

2019年度数理科学基礎（理I 6,7,9,10組向け，足助担当）演習問題 3 v4 2019/5/14（火）

19/5/3: (v1) 連休で少し間が開くので暫定的に作問．講義の進捗によっては追って問を加える．

19/5/9: (v2) 問 3.3 にコメントを追加．問 3.4 を修正．勾配，回転，発散に関する問を追加．そのほか一部の文言を修正．

19/5/12: 問 3.21 を追加．

19/5/15: 一部の文言を修正．問題には変更はない．

- 演習問題は講義の進捗になるべく合わせて作成しているが，一般的に講義は遅れ気味である．明らかに講義でまだ扱われていないことに関する問についてはさしあたり放置して良い．

内積

問 3.21. 1) $A \in M_n(\mathbb{R})$ とする． $v, w \in \mathbb{R}^n$ について， $\langle v | Aw \rangle = \langle {}^tAv | w \rangle$ が成り立つことを示せ．

2) $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする． $v, w \in \mathbb{C}^n$ について， $\langle v | Aw \rangle = \langle A^*v | w \rangle$ が成り立つことを示せ．

問 3.1. \mathbb{R}^3 の標準的な内積を $\langle \cdot | \cdot \rangle$ で表す．また，標準的なノルムを $\|\cdot\|$ で表す． $v \in \mathbb{R}^3$ について $\|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$ が成り立つ．さて， $n = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \in K^3$ とし， $\|n\| = 1$ とする．また， $L, H \subset \mathbb{R}^3$ を

$$L = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}, v = \lambda n\},$$

$$H = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle n | v \rangle = 0\}$$

により定める．

1) $\forall v \in L, w \in H, \langle v | w \rangle = 0$ が成り立つことを示せ．

2) $\pi_L: \mathbb{R}^3 \rightarrow L$ を $v \in \mathbb{R}^3$ について

$$\pi_L(v) = \langle n | v \rangle n$$

と置くことにより定める．また， $\pi_H: \mathbb{R}^3 \rightarrow H$ を $v \in \mathbb{R}^3$ について

$$\pi_H(v) = v - \pi_L(v)$$

と置くことにより定める．

a) $\forall v \in \mathbb{R}^3, \pi_L(v) \in L$ および $\forall v \in \mathbb{R}^3, \pi_H(v) \in H$ が成り立つことを示せ．

b) $\pi_H + \pi_L = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ が成り立つ，即ち， $\forall v \in \mathbb{R}^3, \pi_H(v) + \pi_L(v) = v$ が成り立つことを示せ．また， $\pi_H \circ \pi_L = \pi_L \circ \pi_H = 0$ （零写像）が成り立つことを示せ．

c) $\pi_H \circ \pi_H = \pi_H$ および $\pi_L \circ \pi_L = \pi_L$ が成り立つことを示せ．

d) $\forall v \in \mathbb{R}^3$, $\langle \pi_H(v) \mid \pi_L(v) \rangle = 0$ が成り立つことを示せ.

行列式

問 3.2. 1) $a = a_1 \in \mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ とする. $P(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists t \in [0, 1], x = ta\}$ と置く. また, $\text{vol } P(a)$ で $P(a)$ の体積 (今の場合には長さ) を表すことにする. $a \geq 0$ ならば $\det[a] = \text{vol } P(a)$ が, $a \leq 0$ ならば $\det[a] = -\text{vol } P(a)$ が成り立つことを示せ.

2) $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$ とする. $P(a_1, a_2) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t_1, t_2 \in [0, 1], x = t_1 a_1 + t_2 a_2\}$ と置く. また, $\text{vol } P(a)$ で $P(a)$ の体積 (今の場合には面積) を表すことにする.

a) $a_1 \neq 0$ とする. このとき, $H_1 = \mathbb{R}a_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t \in \mathbb{R}, x = ta_1\}$ と定める. H_1 には自然に向きを定める (a_1 が向いている方向に向かっていると考える). そして \mathbb{R}^2 を H_1 で切る ($\mathbb{R}^2 \setminus H_1$ を考える). このとき, a_2 が H_1 の「左側」に属するならば $\det[a_1 \ a_2] = \text{vol } P(a_1, a_2)$ が, 「右側」に属するならば $\det[a_1 \ a_2] = -\text{vol } P(a_1, a_2)$ が成り立つことを示せ. また, a_2 が H_1 に含まれる場合には $\det[a_1 \ a_2] = 0$ が成り立つことを示せ.

b) $a_1 = 0$ ならば $\det[a_1 \ a_2] = 0$ が成り立つことを示せ.

一般には $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ について

$$P(a_1, \dots, a_n) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists t_1, \dots, t_n \in [0, 1], x = t_1 a_1 + \dots + t_n a_n\}$$

と定めると, $|\det[a_1 \ \dots \ a_n]| = \text{vol } P(a)$ が成り立つ. 符号は $n = 1$ の場合や $n = 2$ の場合を一般化した規則により定まるが, ここでは省略する.

問 3.3. $n \leq 3$ の場合に, $A, B \in M_n(K)$ について $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ が成り立つことを示せ.

※ 発表は $n = 2$ の場合についてすればよい.

問 3.4. $n = 2$ あるいは $n = 3$ とする.

1) 行列式は行及び列に関して多重線型性を持つことを示せ.

2) 行列式は行及び列に関して交代性を持つことを示せ.

3) $\det E_2 = 1$, $\det E_3 = 1$ が成り立つことを確かめよ (これは発表には用いないこと).

問 3.5. $a, b \in \mathbb{R}^3$ とすると

$$\langle a \mid a \times b \rangle = \langle b \mid a \times b \rangle = 0$$

が成り立つことを示せ.

問 3.6. $a, b \in \mathbb{R}^3$ とする. $\det[a \ b \ a \times b] = \|a \times b\|^2$ が成り立つことを示せ.

問 3.7. $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ とする.

1) $a \times (b \times c) = \langle a | c \rangle b - \langle a | b \rangle c$ が成り立つことを示せ.

2)

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$$

が成り立つことを示せ. これはヤコビ恒等式 (Jacobi identity) と呼ばれる.

ベクトル解析の入り口

この節の間については偏微分について学んでから解けば良い.

\mathbb{R}^3 の元を $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ と表す. また, $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ について, $f(x, y, z) = f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)$ とする. 以下では函数が微分可能かどうかは気にしなくて良い^{†1}.

定義 3.8. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ について $\text{grad } f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$\text{grad } f = \nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$$

により定め, f の勾配ベクトル場 (gradient vector field) あるいは単に勾配 (gradient) と呼ぶ.

注 3.9. 本当は $\text{grad } f$ は \mathbb{R}^3 上のベクトル場であって, \mathbb{R}^3 値函数ではない. 実際には \mathbb{R}^3 上のベクトル場と, \mathbb{R}^3 上の \mathbb{R}^3 値函数を同一視する方法があるが, 定義 3.8 ではそのステップを省略している. $\text{grad } f$ をベクトル場として扱う際には

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z}$$

などの記法が用いられる.

定義 3.10. 定義 3.8 を踏まえて

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

と定める.

^{†1}正確には, 函数は 2 回微分可能であって, 偏微分の順序は交換可能であるとする. これについては微分積分学で詳しく扱う予定である.

さしあたり ∇ それ自体には意味が無いが（実際には意味が付き，作用素あるいは演算子と呼ばれる）， ∇f は ∇ の「空席」となっているところに f を置くことにより定まる．即ち，

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$$

とすればよい．

定義 3.11. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ とし，

$$f(x, y, z) = \begin{bmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{bmatrix}$$

と表す（このことを，函数（のみ）に着目して

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

とも表す）．このとき，

$$\text{rot } f = \nabla \times f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{bmatrix}$$

と定め（二つの等号はいずれも定義である）， f の回転（rotation）と呼ぶ．

回転はベクトル場に対してベクトル場を与える対応である．

定義 3.12. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ とし， $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$ と表す．このとき，

$$\text{div } f = \nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$$

と置いて f の発散と呼ぶ．

発散はベクトル場に対して函数を与える対応である．

問 3.13. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ とすると

$$\text{rot}(\text{grad } f) = 0$$

が成り立つことを示せ. また, $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ とすると

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} f) = 0$$

が成り立つことを示せ.

$\operatorname{grad}, \operatorname{rot}, \operatorname{div}$ に関しては, 一見意味不明な等式が幾つか成り立つ. 現時点では「計算すればわかる」以上の説明ができないので, これについてはベクトル解析に譲る. また, 問 3.13 については, 逆が一定程度成り立つ. 逆がどのように成り立つかは結構難しい (その分大切である).

行列の基本変形・基本行列

問 3.14. 1) 基本行列は正則であることを示せ. より詳しく, $\lambda, \mu \in K, \lambda \neq 0$ とし, また, $i \neq j$ とすると, 以下が成り立つことを示せ. 即ち,

$$P(i; \lambda)^{-1} = P(i; 1/\lambda),$$

$$Q(i, j)^{-1} = Q(j, i),$$

$$R(i, j; \mu)^{-1} = R(i, j; -\mu)$$

が成り立つ.

2) 行基本変形は可逆な操作であって, 逆操作も行基本変形であることを示せ. また, 列基本変形は可逆な操作であって, 逆操作も列基本変形であることを示せ.

問 3.15. 基本行列について次が成り立つことを示せ.

$$\det P_n(i; \lambda) = \lambda,$$

$$\det Q_n(i, j) = -1,$$

$$\det R_n(i, j; \mu) = 1$$

ヒント: $P_n(i; \lambda)$ について帰納的に示せる. $Q_n(i, j)$ については行列式の交代性を用いると良い. $R_n(i, j)$ については行列式の多重線型性を用いると良い.

問 3.16. $A \in M_{m,n}(K)$ とする. また, L_1, \dots, L_l を行基本変形, R_1, \dots, R_r を列基本変形とし, 例えば A に L_1 を施して得られる行列を $L_1(A)$ で表すことにする. また, 例えば $L_1(L_2(A))$ は $L_1L_2(A)$ と略記する. さて, T を L_1, \dots, L_l の順序, R_1, \dots, R_r の順序は保たれているが, L_i たちと R_j たちは任意に現れるような列とする. 例えば $T = L_1 \cdots L_l R_1 \cdots R_r$, $T = L_1 R_1 L_2 L_3 R_2 \cdots R_r L_l$ などとする. このような任意の T について

$$T(A) = R_1 R_2 \cdots R_r (L_1 L_2 \cdots L_l (A)) = L_1 L_2 \cdots L_l (R_1 \cdots R_r (A))$$

が成り立つことを示せ.

ヒント : $A \in M_{m,n}(K)$ とする. $L \in GL_m(K)$ を左基本変形に対応する基本行列, $R \in GL_n(K)$ を右基本変形に対応する基本行列とすると $LAR = (LA)R = L(AR)$ が成り立つ. 一般には L や R はそれぞれ l 個, r 個必要となる.

問 3.17. $\lambda, \mu \in K, \lambda \neq 0$ とする. また, $i \neq j$ とする. このとき

$$\begin{aligned} {}^tP(i; \lambda) &= P(i; \lambda), \\ {}^tQ(i, j) &= Q(i, j), \\ {}^tR(i, j; \mu) &= R(j, i; \mu) \end{aligned}$$

が成り立つことを示せ. 特に, P をいずれかの基本行列とすると, tP も基本行列であることを示せ.

問 3.18 (発表するのには時間的に無理があるので, この問は自習用とする. 質問等は随時受ける).

$A \in M_{m,n}(K)$ とする.

- 1) A を行基本変形 (左基本変形) により, (既約) 行階段行列に変形できることを示せ.
- 2) A を列基本変形 (右基本変形) により, (既約) 列階段行列に変形できることを示せ.
- 3) m, n を適当に定めると, $A \in M_{m,n}(K)$ であって, 行基本変形 (左基本変形) により (既約) 列階段行列に変形できないものが存在することを示せ.

※ このようなことを示すためには原則として例を挙げる必要がある. 例えば $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(K)$ とし, a_{11}, \dots, a_{22} を適当に定めると A は行基本変形により列階段行列に変形することはできない」としても, どのように「適当に」定めれば良いか全く分からず, これでは証明にはならない.

- 4*) 1) あるいは 2) において, 得られる行階段行列あるいは列階段行列は一意的であることを示せ.

問 3.19. $\text{rank } {}^tA = \text{rank } A$ が成り立つことを示せ.

問 3.20. 1) 以下に挙げる行列について以下の操作を行え.

- a) 行基本変形により行階段行列に変形せよ.
- b) 列基本変形により列階段行列に変形せよ.

c) 行基本変形, 列基本変形を用いて

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

の形に変形せよ. この形を階数標準形と呼ぶことがあるが, あまり一般的(万国共通)ではないように思える.

d) ランクを求めよ.

i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. 2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, ただし $a \in \mathbb{R}$. 3) $\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & -1 \end{bmatrix}$.

2*) $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ とし, 行左基本変形で階段行列に変形することを考える. A を実行列と考えて行基本変形も実数の範囲で行って得られるランクと, A を複素行列と考えて行基本変形を複素数の範囲で行って得られるランクは等しいことを示せ. また, このことを1) について例示せよ (具体的な行基本変形について, 実数の範囲で済んでいるものと, 実数でない複素数を用いているものをそれぞれ一つずつ挙げればよい).

※ 前半はありとあらゆる基本変形について考えないといけないので, 何か具体的にを行うのではなく理屈に訴える必要がある.

(以上)