2018 年度微分積分学演習（理 I 36–39 組向け，足助担当）問題 27 v1

’18/12/13（木）

改変履歴．’18/12/9 :（v1）初版作成．12/26 の講義（最終回）までの内容である．

**問 27.1.** $f, g\colon (0,2) \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \dfrac{1}{x},\ g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ により定める．

1) $x = 1$ を中心とする $f$ と $g$ のテーラー級数を求めよ．
2) $0 < c < 1$ とする．1) で求めた級数は $[c, 2-c]$ 上 $f$ に一様収束することを示せ．つまり，1) で求めた $f$ に関する級数を $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-1)^n$ とすると，
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N},\ \forall x \in [c, 2-c],\ \forall m \geq M,\ \left|\sum_{n=0}^{m} a_n(x-1)^n - f(x)\right| < \epsilon$$
が成り立つことを示せ．
3) 1) で求めた $f$ のテーラー級数を項別微分し，$g$ のテーラー級数と比較せよ．

**問 27.2.** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を
$$f(t) = \int_0^2 \frac{1+tx}{1+tx+(tx)^2}dx$$
により定める．$f$ の原点（$t=0$）におけるテーラー展開（剰余項のないもの．テーラー級数と呼ぶこともある）を求めよ．また，級数の収束半径を求めよ．

**問 27.3.** $I = (-1, 1)$ とし，$I$ 上の函数 $f$ を $t \in I$ について
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$
と置くことにより定める．

1) $f$ の $t=0$ を中心とするテーラー級数（剰余項のないテーラー展開）を求めよ．また，求めた級数（冪級数）の収束半径を求めよ．
2) $I$ 上の函数 $g$ を $x \in I$ について
$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x\sin\theta)\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}} \end{aligned}$$
により定める．$g$ の $x=0$ を中心とするテーラー級数を求めよ．また，求めた級数（冪級数）の収束半径を求めよ．

※ この積分は**楕円積分**と呼ばれ，初等函数では表せない（簡単な函数の組み合わせで表すことができない）ことが知られている．そこで，積分の形のままテーラー級数を求める必要がある．

**問 27.4.** $k \in \mathbb{R}$ とし，$\mathbb{R}^3$ の部分集合 $\Sigma$ を

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = 1 + k(x^2 + y^2),\ z \geq 0\}$$

により定める．また，

$$D = \begin{cases} \mathbb{R}^2, & k \geq 0, \\ \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq \dfrac{1}{|k|}\right\}, & k < 0 \end{cases}$$

と置く．

1) $\Sigma$ を $k = -1, 0, 1$ それぞれの場合について $x^2 + y^2 \leq 1$ の範囲で図示せよ．
2) $(x, y) \in D$ について $F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1 + k(x^2 + y^2)} \end{pmatrix}$ と定める．また，$B(R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ と置き，$B(R) \subset D$ と仮定する（$1 - |k|\, R^2 \geq 0$ と仮定する）．このとき，

$$A(k; R) = \int_{B(R)} \sqrt{\det {}^t DF(x, y) DF(x, y)}\, dxdy$$

を求めよ．なお，$\Sigma_R = \{(x, y, z) \in \Sigma \mid x^2 + y^2 \leq R\}$ とするとこれは $\Sigma_R$ の面積である．

※ 計算は結構大変である．
3) $A(k; R)$ の $R = 0$ におけるテーラー展開を求めよ．
4) $k$ や $R$ が変化するときの $A(k; R)$ の変化の様子（例えば単調増加あるいは単調減少であるとか，最大・最小をどこで取るか，あるいは最大・最小は取らないか，等）を調べよ．

**問 27.5.** 次の常微分方程式のそれぞれについて以下の問に答えよ．

1) それぞれの微分方程式を実一変数の，実数値函数についての常微分方程式と考え形式的級数解を求め，得られた解の収束半径を求めよ．ただし，変数は $x$ とし，級数の中心は 0 とする．
2) それぞれの常微分方程式の $C^\infty$ 級の解を（級数解法で求まるものに限らず）全て求め，級数解と比較せよ．

3**) それぞれの常微分方程式を，複素一変数の複素数値函数に関する方程式と考えて級数解を求めよ．ただし，変数は $x$ とし，級数の中心は $0$ とする．

a) $\dfrac{d^3f}{dx^3}+\dfrac{d^2f}{dx^2}-\dfrac{df}{dx}-f=0$，$f(0)=0$，$\dfrac{df}{dx}(0)=0$，$\dfrac{d^2f}{dx^2}(0)=1$.

b) $\dfrac{df}{dx}=1+f^2$，$f(0)=0$.

c) $\dfrac{df}{dx}=3f^{\frac{2}{3}}$，$f(0)=0$.

d) $f\dfrac{df}{dx}=-1$，$f(0)=1$.

e) $f\dfrac{df}{dx}=-1$，$f(0)=0$.

**問 27.6.** 1) $\alpha\in\mathbb{R}$ とする．実変数 $x$ についての実数値函数 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に関する（常）微分方程式 $Df=\dfrac{df}{dx}=\alpha f$ の，$x=0$ を中心とする級数解を全て求め，それぞれについてその収束半径を求めよ．また，級数解が一意的に定まるためには $f(0),Df(0),D^2f(0),\dots$ のうちいくつを指定すれば良いか調べよ．

2*) 1) について，変数と値を共に複素数とした場合どうであるか調べよ．

3) $M_2(\mathbb{R})$ で実数を成分とする $2\times 2$ 行列（2 行 2 列の行列）全体の成す線型空間を表す．$A\in M_2(\mathbb{R})$，$v\in\mathbb{R}^2$ とし，実変数 $\mathbb{R}^2$-値函数 $f=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}$ に関する（常）微分方程式

$$Df=Af,\quad f(0)=v \tag{27.7}$$

を考える．

a) $P$ を正則な $M_2(\mathbb{R})$ の元とする（$P\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ とする）．$f$ が方程式 (27.7) の解であるとき，函数 $g$ を $g(x)=Pf(x)$ により定めると，$g$ は

$$Dg=(PAP^{-1})g,\quad g(0)=Av \tag{27.7'}$$

の解であることを示せ．また，逆に，$g$ が方程式 (27.7') の解であるとき，$f$ を $f(x)=P^{-1}g(x)$ により定めると $f$ は方程式 (27.7) の解であることを示せ．

b) $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$，$v=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ とする．方程式 (27.7) の解を求めよ（実数値函数に関する方程式（二つ）に帰着するのが容易であろう）．

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする．方程式 (27.7) の解を求めよ（うまく $P$ を選んで方程式 (27.7') を考えるのが容易である）．

d) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする．方程式 (27.7) の解を求めよ（うまく $P$ を選んで方程式 (27.7') を考えるのが容易であるが，素直に解くと実数の範囲では全てを処理しきることが困難である．今は無理に解決しなくてよい．一つの回避策は次の問 27.8 で扱うが他にもある．それらについては「常微分方程式」で（明示的にかどうかはともかく）扱う）．

**問 27.8.** 記号などは問 27.6 のものをそのまま用いる．問 27.6 の 1) や b) を踏まえて次のような「級数」解法を考えてみる（中心は $x = 0$ とする）．

1) $A$ が対角行列であるとする．このとき，方程式 (27.7) の解は $f(x) = v + (Ax)v + \dfrac{1}{2!}(Ax)^2 v + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(Ax)^n v$ で与えられることを示せ（右辺が収束していることも示すこと．ただし，行列やベクトルに値を取る級数（冪級数）について，各成分を級数と看做すと収束しているとき，収束すると定める）．ここで，$A$ や $x$ によらず $(Ax)^0 = I_2$（2 次の単位行列）と定める．
ヒント：行列のノルムを用いると良い．2) も同様である．

2) 1) を踏まえて，$A$ が一般の場合にも $B(x) = I_2 + Ax + \dfrac{1}{2!}(Ax)^2 + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(Ax)^n$ と定める．すると $B(x)$ は行列値の冪級数として収束していることを示せ．また，収束半径は $+\infty$ であることを示せ．ただし，行列値の冪級数の収束半径は，各成分の収束半径の最小値とする．この $B(x)$ を通常は $\exp Ax$ や $\exp(Ax)$ で表す（$Ax = xA$ なので $\exp xA$ と表すこともある）．

3) $\dfrac{d \exp Ax}{dx}(x) = A \exp Ax = (\exp Ax)A$ が成り立つことを示せ．

4) $f(x) = (\exp Ax)v$ とすると，$f$ は方程式 (27.7) の解であることを示せ．

5) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のそれぞれの場合について $\exp Ax$ を求めよ．

6) $\exp(PAP^{-1}x) = P(\exp Ax)P^{-1}$ が成り立つことを示せ．

**問 27.9.** $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を $C^\infty$ 級の函数とする．すると，$\displaystyle\int_0^1 Dh(t)dt = h(1) - h(0)$ が成り立つ．このことを踏まえて，以下の問に答えよ．$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $C^\infty$ 級の函数とする．

1)
$$\int_{[0,1]\times[0,1]} D_1D_2f(x,y)dxdy = \int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)dxdy$$
を $f$ の微分を含まない形に表せ．

2) 次の積分を $f$ の微分を含まない形に表せ．また，1) の結果と比較せよ．

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(1,t)dt + \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(0,1-t)dt$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t,0)dt + \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(1-t,1)dt$

**問 27.10.** $D_1 = \mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{R}\,|\,z\leq 0\}$，$D_2 = \mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{R}\,|\,z\geq 0\}$ と置く．$n\in\mathbb{Z}$ とし，$f_n\colon D_1\to\mathbb{C}$ と $g_n\colon D_2\to\mathbb{C}$ をそれぞれ $f_n(1)=2\pi\sqrt{-1}n$ と $g_n(-1)=2\pi\sqrt{-1}\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$ をみたす対数函数の枝とする．即ち，$f_n\colon D_1\to\mathbb{C}$ は $e^{f_n(z)}=z$ かつ $f_n(1)=2\pi\sqrt{-1}n$ をみたす唯一の函数，$g_n\colon D_2\to\mathbb{C}$ は $e^{g_n(z)}=z$ かつ $g_n(-1)=2\pi\sqrt{-1}\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$ をみたす唯一の函数とする．

1) $z_0\in D_1$ とする．$f_n$ の $z_0$ を中心としたテーラー展開（テーラー級数）を求め，その収束半径を求めよ．また，$w_0\in D_2$ とするとき，$g_n$ の $w_0$ を中心としたテーラー展開（テーラー級数）を求め，その収束半径を求めよ．

2) $D_1\cap D_2$ は自然に二つの部分に分かれるのでそれぞれを $H_1, H_2$ とする．即ち，$H_1 = \{z\in D_1\cap D_2\,|\,\mathrm{Im}\,z>0\}$，$H_2=\{z\in D_1\cap D_2\,|\,\mathrm{Im}\,z<0\}$ とする．$H_1$ 上で $f_n=g_m$ が成り立つための $n,m$ に関する条件を求めよ．また，$H_2$ 上で $f_n=g_m$ が成り立つための $n,m$ に関する条件を求めよ．

3**) $D$ を次のような,（かなり太い）螺旋状の領域とする．即ち，まず
$$E=\{z\in\mathbb{C}\,|\,\text{ある } r\geq 0 \text{ が存在して } z=re^{\pi\sqrt{-1}r}\}$$
と置き，
$$D=\mathbb{C}\setminus E$$
と置く．

a) $D$ を図示せよ（まず $E$ を考えるのが簡単である）．

b) $D$ 上で（$D$ 全体で）で定まった函数 $f\colon D\to\mathbb{C}$ であって，$e^{f(z)}=z$ かつ $f(1)=0$ をみたすものがただ一つ存在することを示せ（つまり，$D$ 上で定まった対数函数の枝で，1 に対して 0 を与えるものがただ一つ存在することを示せ）．

c) $f$ は $D$ 上（複素）解析的であることを示せ.

d) $f$ を $D$ 全体で単一の冪級数として表すことはできないことを示せ.

（以上）