2018 年度線型代数学演習（理 I 36–39 組向け，足助担当）問題 16 v4
’18/9/27（木）
改変履歴．’18/9/25 :（v1）初版作成．概ね 9/27 の講義の分までの内容である．
’18/9/27 :（v2）誤植を修正．
’18/9/28 :（v3）問 16.16 の 1) を修正．なお．エルミート計量について $\langle v \mid \lambda w\rangle = \lambda\langle v \mid w\rangle$ とする定義を採るならばもとのままが正しい．
’18/10/25 :（v4）誤植を修正．

問 16.1 (線型写像の場合の逆写像定理)．$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線型写像とする．

1) f の表現行列を $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ とすると $Df = A$ が成り立つ（$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ Df(x) = A$ が成り立つ）ことを示せ．
2) f が線型同型写像であるならば $n = m$ が成り立つことを示せ．
3) $n = m$ であって，$\det Df \neq 0$ が成り立つならば，f は線型同型写像であることを示せ．

問 16.2 (線型写像の場合の陰函数定理)．$f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ を線型写像とする．二つある $\mathbb{R}^m$ を区別するため $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ の $\mathbb{R}^m$ を V，もう一方の $\mathbb{R}^m$ を W とする．また，$Df = (P_1\ P_2)$ と $P_1 \in M_{m,n}(\mathbb{R}),\ P_2 \in M_m(\mathbb{R})$ と区分けすると $P_2 \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ が成り立つとする．

1) $\mathbb{R}^n$ から $V = \mathbb{R}^m$ への線型写像 g が存在して $f(x, g(x)) = o \in \mathbb{R}^m$ が成り立つことを示せ．
   ヒント：主張のような g が存在したとする．f の表現行列を F，g の表現行列を G とするならば，$F = (P_1\ P_2)$，$F\begin{pmatrix} E_n \\ G \end{pmatrix} = O_{m,n}$ が成り立つ．
2) $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ について $f(x, y) = o$ が成り立つならば，1) の g について $y = g(x)$ が成り立つことを示せ．

※ 逆写像定理，陰函数定理については「微分積分学」で述べるが，上述の問に関しては
これに関係なく純粋に線型代数の範疇で解ける．

定義 16.3 (定義 15.2.15)．

I) V を実線型空間（$\mathbb{R}$-線型空間）とする．$\langle\cdot \mid \cdot\rangle\colon V \times V \to \mathbb{R}$ が V の**ユークリッド計量**あるいは単に**計量**であるとは，以下が成り立つことを言う．即ち，
   1) $\forall v_1, v_2, w \in V,\ \langle v_1 + v_2 \mid w\rangle = \langle v_1 \mid w\rangle + \langle v_2 \mid w\rangle$.
   2) $\forall v, w \in V,\ \lambda \in \mathbb{R},\ \langle \lambda v \mid w\rangle = \lambda\langle v \mid w\rangle$.
   3) $\forall v, w \in V,\ \langle w \mid v\rangle = \langle v \mid w\rangle$.

4) $\forall v \in V,\ \langle v \mid v \rangle \geq 0$.

5) $v \in V,\ \langle v \mid v \rangle = 0 \Rightarrow v = o$.

ユークリッド計量を**ユークリッド内積**あるいは単に内積と呼ぶことも多い．

II) V を複素線型空間（$\mathbb{C}$-線型空間）とする．$\langle \cdot \mid \cdot \rangle \colon V \times V \to \mathbb{C}$ が V の**エルミート計量**あるいは単に計量であるとは，以下が成り立つことを言う．即ち，

1') $\forall v_1, v_2, w \in V,\ \langle v_1 + v_2 \mid w \rangle = \langle v_1 \mid w \rangle + \langle v_2 \mid w \rangle$.

2') $\forall v, w \in V,\ \lambda \in \mathbb{C},\ \langle \lambda v \mid w \rangle = \lambda \langle v \mid w \rangle$.

3') $\forall v, w \in V,\ \langle w \mid v \rangle = \overline{\langle v \mid w \rangle}$.

4') $\forall v \in V,\ \langle v \mid v \rangle \geq 0$.

5') $v \in V,\ \langle v \mid v \rangle = 0 \Rightarrow v = o$.

エルミート計量を**エルミート内積**あるいは単に内積と呼ぶことも多い．

いずれの場合にも組 $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ を**計量線型空間**と呼ぶ．$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ が明らかである場合には単に V を計量線型空間と呼ぶ[†1]．

注 16.4 (注 15.2.16). 1) 計量を $(\cdot, \cdot)$ で表すこともあるが，例えば (v, w) としたとき v と w の内積なのか (v, w) という $V \times V$ の元なのか紛らわしいのでこの演習では $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ を用いる．

2) エルミート計量について，定義 16.3 の条件 2') は

2") $\forall v, w \in V,\ \lambda \in \mathbb{C},\ \langle v \mid \lambda w \rangle = \lambda \langle v \mid w \rangle$.

とすることもある[†2]．また，条件 3) により $v \in V$ について $\langle v \mid v \rangle \in \mathbb{R}$ が成り立つので，条件 4) は意味を持つ．

問 16.5. $K = \mathbb{R}$ とする．以下のように V と $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ を定めるとき，$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ が V のユークリッド計量であるか判定せよ（証明と共に述べよ）．

1) $V = \mathbb{R}^3$ とし，$v = [v_i],\ w = [w_i] \in V$ について

$$\langle v \mid w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + 2 v_3 w_3$$

とする．

1') $V = \mathbb{R}^3$ とし，$v = [v_i],\ w = [w_i] \in V$ について

$$\langle v \mid w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + 2 v_3 v_3$$

[†1] テキストの定義 6.5 はこちらを念頭に置いていると考えられる．

[†2]「線型代数学」で指定されている参考書に合わせて 2) を用いる．数学では 2) が，物理では 2') が標準的だと思われる．

とする．

2) $V = \mathbb{R}^3$ とし，$v = [v_i],\ w = [w_i] \in V$ について

$$\langle v \mid w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_3 + v_3 w_2$$

とする．

3) $V = \mathbb{R}[x] = \{x$ を変数とし，実数を係数とする多項式全体 $\}$ とする．$f, g \in V$ について

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$
$$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$$

と表して，

$$\langle f \mid g \rangle = \sum_{k=0}^{\max\{n,m\}} a_k b_k$$

と置く．また，

$$\langle f \mid g \rangle' = \sum_{k=0}^{\min\{n,m\}} a_k b_k$$

とすると $\langle f \mid g \rangle' = \langle f \mid g \rangle$ が成り立つことを示せ．

4) $V = C([0,1]) = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f$ は連続 $\}$ とし，$f, g \in C([0,1])$ について

$$\langle f \mid g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

と置く．

※ 積分はまだ定義していないが，高校までの要領で考えれば良い（以下同様）．また，$C([0,1])$ は $C^0([0,1])$ と表すことも多いし，ほかの記号を用いることもある．なお，この内積は L^2-内積のごく簡単な場合である．

5) $V = C^\infty([0,1]) = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f$ は C^∞ 級 $\}$ とし，$f, g \in C^\infty([0,1])$ について

$$\langle f \mid g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt + \int_0^1 Df(t)Dg(t)dt$$

と置く．なお，このような内積は微分方程式を扱うときなどに良く現れる（ソボレフ内積と呼ばれる）．

問 16.6. $K = \mathbb{C}$ とする．以下のように V と $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ を定めるとき，$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ が V のエルミート計量であるか判定せよ（証明と共に述べよ）．

1) $V=\mathbb{C}^3$ とし，$v=[v_i],\ w=[w_i]\in V$ について

$$\langle v \mid w\rangle = v_1\overline{w_1}+v_2\overline{w_2}+2v_3\overline{w_3}$$

とする．

2) $V=\mathbb{C}^3$ とし，$v=[v_i],\ w=[w_i]\in V$ について

$$\langle v \mid w\rangle = v_1\overline{w_1}+v_2\overline{w_2}+\sqrt{-1}2v_3\overline{w_3}$$

とする．

3) $V=\mathbb{C}^3$ とし，$v=[v_i],\ w=[w_i]\in V$ について

$$\langle v \mid w\rangle = v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3$$

とする．

4) $V=\mathbb{C}^3$ とし，$v=[v_i],\ w=[w_i]\in V$ について

$$\langle v \mid w\rangle = \mathrm{Re}(v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3)$$

とする．

5) $V=\mathbb{C}[x]=\{x$ を変数とし，複素数を係数とする多項式全体$\}$ とする．$f,g\in V$ について

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,$$
$$g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$$

と表して，

$$\langle f \mid g\rangle = \sum_{k=0}^{\max\{n,m\}} a_k\overline{b_k}$$

と置く．

6) $V=C([0,1];\mathbb{C})=\{f\colon[0,1]\to\mathbb{C}\mid f$ は連続$\}$ とし，$f,g\in C([0,1];\mathbb{C})$ について

$$\langle f \mid g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$$

と置く．但し，複素数値の函数の積分は実部と虚部に分けて取る．なお，この内積は L^2-内積のごく簡単な場合である．

7) $V=C^\infty([0,1];\mathbb{C})=\{f\colon[0,1]\to\mathbb{C}\mid f$ は C^∞ 級$\}$ とし，$f,g\in C([0,1];\mathbb{C})$ について

$$\langle f \mid g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt+\int_0^1 Df(t)\overline{Dg(t)}dt$$

と置く．但し，複素数値の函数の積分は実部と虚部に分けて取る．なお，このような内積は微分方程式を扱うときなどに良く現れる（ソボレフ内積と呼ばれる）．

問 16.7. I) V を実線型空間とし，$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ を V のユークリッド計量とする．

a) $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ について

$$\forall v, w_1, w_2 \in V,\ \langle v \mid w_1 + w_2 \rangle = \langle v \mid w_1 \rangle + \langle v \mid w_2 \rangle,$$
$$\forall v, w \in V,\ \lambda \in \mathbb{R},\ \langle v \mid \lambda w \rangle = \lambda \langle v \mid w \rangle$$

が成り立つことを示せ．1)，2) とこの性質を合わせて**双線型性**と呼ぶ（次の小問も参照のこと）．

b) $w \in V$ を固定する．$f\colon V \to \mathbb{R}$ を $f(v) = \langle v \mid w \rangle$ により，また，$g\colon V \to \mathbb{R}$ を $g(v) = \langle w \mid v \rangle$ によりそれぞれ定める．すると f, g はいずれも実線型写像（$\mathbb{R}$-線型写像）であることを示せ．

II) V を複素線型空間とし，$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ を V のエルミート計量とする．

a) $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ について

$$\forall v, w_1, w_2 \in V,\ \langle v \mid w_1 + w_2 \rangle = \langle v \mid w_1 \rangle + \langle v \mid w_2 \rangle,$$
$$\forall v, w \in V,\ \lambda \in \mathbb{C},\ \langle v \mid \lambda w \rangle = \overline{\lambda} \langle v \mid w \rangle$$

が成り立つことを示せ．1)，2) とこの性質を合わせて**半双線型性**と呼ぶ（次の小問も参照のこと）．

b) $w \in V$ を固定する．$f\colon V \to \mathbb{C}$ を $f(v) = \langle v \mid w \rangle$ により，また，$g\colon V \to \mathbb{C}$ を $g(v) = \langle w \mid v \rangle$ によりそれぞれ定める．すると f は複素線型写像（$\mathbb{C}$-線型写像）であることを示せ．また，g は**反線型写像**である[†3]，即ち

$$\forall v, v' \in V,\ g(v + v') = g(v) + g(v'),$$
$$\forall v \in V,\ \lambda \in \mathbb{C},\ g(\lambda v) = \overline{\lambda} g(v)$$

が成り立つことを示せ．

c) エルミート計量に関する条件 3') を用いて，$\forall v \in V,\ \langle v \mid v \rangle \in \mathbb{R}$ が成り立つことを示せ．

問 16.8. $K = \mathbb{R}$ あるいは $K = \mathbb{C}$ とし，V を K-線型空間とする．また，$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ を V のユークリッド計量（$K = \mathbb{R}$ の場合）あるいはエルミート計量（$K = \mathbb{C}$ の場合）とする．さて，$W \subset V$ を K-部分線型空間とする（すると W はそれ自体 K-線型空間なのであった）．この

[†3] 半双線型，反線型といった用語は「線型もどき」くらいに考えておけば良く，暗記する必要は全くない．一方，条件は正確に把握しておく必要がある．一定程度の練習を積めば自然に身につくものであるので，わざわざ暗記するかどうかは場合による．

とき，$\langle\cdot\mid\cdot\rangle_W\colon W\times W\to K$ を，$w,w'\in W$ について

$$\langle w\mid w'\rangle_W=\langle w\mid w'\rangle$$

と置くことにより定める．このとき，$\langle\cdot\mid\cdot\rangle_W$ は W のユークリッド計量（$K=\mathbb{R}$ の場合）あるいはエルミート計量（$K=\mathbb{C}$ の場合）であることを示せ．$\langle\cdot|\cdot\rangle_W$ を $\langle\cdot|\cdot\rangle$ の W への**制限**と呼ぶ．制限はもとの計量と同じ記号 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ で表すことが多い．

定義 16.9. $K=\mathbb{R}$ あるいは $K=\mathbb{C}$ とし，V を K-線型空間とする．$\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ を V のユークリッド計量（$K=\mathbb{R}$ の場合）あるいはエルミート計量（$K=\mathbb{C}$ の場合）とする．$v\in V$ について

$$\|v\|=\sqrt{\langle v\mid v\rangle}$$

と置いて v の $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ に関する**ノルム**，長さあるいは大きさと呼ぶ．

定義 16.10. $K=\mathbb{R}$ あるいは $K=\mathbb{C}$ とし，$\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ を V のユークリッド計量（$K=\mathbb{R}$ の場合）あるいはエルミート計量（$K=\mathbb{C}$ の場合）とする．また，$\mathscr{E}=(e_1,\ldots,e_n)$ を[†4]V の順序付き基底とする（仮に $V=K^n$ であったとしても，$\mathscr{E}$ が標準基底であるとは限らないので注意すること）．このとき，$a_{ij}\in K$ を $a_{ij}=\langle e_i\mid e_j\rangle$ により定め，$A=[a_{ij}]\in M_n(K)$ と置いて A を $\mathscr{E}$ **に関する $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ の表現行列**と呼ぶ．

問 16.11. 1) V を実線型空間，$\mathscr{E}$ を V の順序付き基底とする．また，$\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ を V のユークリッド計量とする．この時，G を $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ の $\mathscr{E}$ に関する表現行列とすると，G は**対称行列**である，即ち ${}^tG=G$ が成り立つことを示せ．

2) V を複素線型空間，$\mathscr{E}$ を V の順序付き基底とする．また，$\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ を V のエルミート計量とする．この時，G を $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ の $\mathscr{E}$ に関する表現行列とすると，G は**エルミート行列**である，即ち $G^*={}^t\overline{G}=G$ が成り立つことを示せ．但し，最初の等号は定義である．なお，G^* を G の**随伴行列**あるいは単に**随伴**と呼ぶ（類似して，実線型空間を考えている場合には状況に応じて転置行列 ${}^tG$ を G の随伴とも呼ぶ）．

以下，$K=\mathbb{R}$ あるいは $K=\mathbb{C}$ とし，V を K-線型空間とする．また，$\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ を V のユークリッド計量（$K=\mathbb{R}$ の場合）あるいはエルミート計量（$K=\mathbb{C}$ の場合）とする．

[†4] $\mathscr{E}$ を筆記する際には何となく形が似ていれば十分である．その際，一番重要なのは通常の E と区別できるようにすることである．ほかにも $\mathfrak{E}$ や $\mathcal{E}$ などの文字もある（これらは全て E に対応する）．これらも用いるのであれば，それぞれを区別できるように何らかの工夫をして書く必要がある．どの種類の文字をいつ使うか，に関しては絶対的な規則はないが分野ごとに一定の慣習がある．これは慣れるしかない．

定義 16.12. V の K 上の基底 $\{e_1, \dots, e_n\}$ が $\langle \cdot | \cdot \rangle$ に関する**正規直交基底**であるとは

$$\langle e_i \mid e_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

が成り立つことを言う．正規直交基底は英語では orthonormal basis と呼ばれるので，しばしば o.n.b. あるいは onb と略記される．また，表現行列を考えるときなど，基底をなすベクトルに順序が必要な場合には順序付き正規直交基底を考える．

問 16.13. $\mathscr{E}$ を V の順序付き基底とする．$\mathscr{E}$ に関する $\langle \cdot | \cdot \rangle$ が単位行列に等しいことと，$\mathscr{E}$ が（順序付き）正規直交基底であることは同値であることを示せ．

問 16.14. $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ を V の順序付き基底とし，G を $\mathscr{E}$ に関する $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ の表現行列とする．さて，$v, w \in V$ について $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$，$w = \sum_{i=1}^{n} w_i e_i$ と表す（${}^t[v_1 \ \dots \ v_n]$，${}^t[w_1 \ \dots \ w_n]$ をそれぞれ v, w の $\mathscr{E}$ に関する座標ベクトルとする）．このとき，

$$\langle v \mid w \rangle = [v_1 \ \cdots \ v_n] \, G \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \tag{16.15}$$

が成り立つことを示せ．

問 16.16. $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ を V の順序付き基底とし，P を $\mathscr{E}$ から $\mathscr{F}$ への基底の変換行列とする．

0) $\mathscr{E}P = \mathscr{F}$，即ち $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathscr{F} = (f_1, \dots, f_n)$ とすると $(e_1 \ \cdots \ e_n)P = (f_1 \ \cdots \ f_n)$ が成り立つことを確かめよ．また，最後の式を書き下すことにより，$f_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$ が得られることを確かめよ．
   ※ これは用語の確認なので，発表には用いないこと．
1) G を $\mathscr{E}$ に関する，G' を $\mathscr{F}$ に関する $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ の表現行列とする．このとき，$G' = {}^t PGP$（$K = \mathbb{R}$ のとき）あるいは $G' = {}^t PG\overline{P}$（$K = \mathbb{C}$ のとき）が成り立つことを示せ．
2) G は正則であることを示せ．必要であれば V の正規直交基底が存在することを用いて良い（このことは次回以降で扱う）．
3) $G \in \mathrm{GL}_n(K)$ とし，G は実対称行列（$K = \mathbb{R}$ の場合）あるいはエルミート行列（$K = \mathbb{C}$ の場合）とする．このとき，式 (16.15) により $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ を定めても，必ずしも計量とはならない．そのような G の例を n ごとに一つずつ挙げよ．
   ※ G が計量を定めるためには一定の条件が要るが，問 16.8 を用いると必要十分条件（の一つ）が分かる．興味があれば調べてみよ．

（以上）