2018 年度幾何学 III 演習問題 4 v1

'18/10/20（火）

改変履歴．'18/10/26：（v1）初版作成．概ね 10/20 の講義の分までの内容である．

ベクトル場などについて

問 4.1. $f\colon M \to M$ を微分同相写像とする．この時，$X \in \mathfrak{X}(M)$ について $f_*X \in \mathfrak{X}(M)$ が

$$f_*X(p) = f_{*p}X(p)$$

により定まることを示せ．

※ f_*X が C^∞ 級であることも示す必要がある．

問 4.2 ***.** $\pi\colon M \to N$ を被覆空間とし，$g\colon M \to M$ は $\pi \circ g = \pi$ を満たす微分同相写像とする（このような g を**被覆変換**（covering transformation）と呼ぶ）．

1) 被覆変換全体は，M の自己微分同相写像（M から M 自身への微分同相写像）全体のなす群 $\mathrm{Diff}(M)$ の部分群をなすことを示せ．
2) $X \in \mathfrak{X}(M)$ とし，$g_*X = X$ が成り立つとすると，$\pi_*X \in \mathfrak{X}(N)$ が

$$\pi_*X(q) = X(p),$$

ただし $p \in \pi^{-1}(q)$，により定まることを示せ．

※ π_*X が C^∞ 級であることも示す必要がある．

問 4.3 ***.** $f\colon M \to N$ とし，$\pi\colon E \to N$ をベクトル束とする．この時，

$$f^*E = \{(p, v) \in M \times E \mid f(p) = \pi(v)\},$$

とし，$f^*\pi\colon E \to M$ を

$$f^*\pi(p, v) = p$$

により定める．f^*Ew を M と E の (f, π) に関する**ファイバー積**と呼ぶ．$(f^*E, f^*\pi)$ は M 上のベクトル束であって，$\operatorname{rank} f^*E = \operatorname{rank} E$ が成り立つことを示せ．また，$\widetilde{f}\colon f^*E \to E$ を $\widetilde{f}(p, v) = v$ により定めると図式

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\widetilde{f}} & E \\ {\scriptstyle f^*\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ M & \xrightarrow[f]{} & N \end{array}$$

は可換であることを示せ．

ヒント：$V \subset N$ を開集合とし，$\psi\colon \pi^{-1}(V) \to V \times \mathbb{R}^r$, $r = \operatorname{rank} E$，を局所自明化とする．$U = f^{-1}(V)$ とすると，$\rho\colon (f^*\pi)^{-1}(U)\,(\subset M \times E) \to U \times \mathbb{R}^r$ が $\rho(p,\alpha) = (p, \mathrm{pr}_2 \circ \psi(\alpha))$ により定まる．

問 4.4***.** $f\colon M \to N$ とする．$X \in \mathfrak{X}(M)$ とすると，$f_*X \in \Gamma(M; f^*TN)$ が

$$f_*X(p) = (p, f_{*p}(X(p)))$$

により定まることを示せ．
※ この観点から言えば，f_*X が一般には定まらないのは $\widetilde{f}\colon f^*TN \to TN$ があまり良くない写像であるから，ということになる．

問 4.5. M, N をいずれも向き付け可能な多様体とする．このとき，$M \times N$ も向き付け可能であることを示せ．また，M, N を連結とすると，直感的には $M \times N$ の向きは M, N の向きに応じて 4 種類ありそうなものだが，実際には 2 種類である．4 種類の向きについて，実際には同じ向きであるものを類別せよ．

問 4.6. $\pi\colon TM \to M$ を接束とする．$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ を M の座標近傍系とし，TM は U_α 上自明だとする．$\psi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ を $(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ により定まる局所自明化とする．この時，$\{(\pi^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha)\}$ は E の座標近傍系であって，$\pi^{-1}(U_\alpha)$ から $\pi^{-1}(U_\beta)$ への座標変換函数 $\psi_{\beta\alpha}$ は

$$\psi_{\beta\alpha}(p, v) = (\varphi_{\beta\alpha}(p), D\varphi_p v)$$

で与えられることを示せ．また，TM が一般のベクトル束の場合にどうなるか，変換函数 $\rho_{\beta\alpha}$ を用いて記述せよ．

問 4.7. $\pi\colon E \to M$ をベクトル束とする．

1) M は多様体として，$\pi\colon E \to M$ はベクトル束としていずれも向き付け可能であるような例を一組挙げよ．また，このような場合には E は多様体として向き付け可能であることを示せ．
2) M は（多様体として）向き付け不可能であるが，$\pi\colon E \to M$ はベクトル束として向き付け可能であるような例を一組挙げよ．また，このような場合には E は多様体としては向き付け不可能であることを示せ．
3) E は多様体としては向き付け不可能であるが，$\pi\colon E \to M$ はベクトル束として向き付け可能であるような例を一組挙げよ．また，このような場合には M は向き付け不可能であることを示せ．

4) E は多様体としては向き付け可能であるが，$\pi\colon E \to M$ はベクトル束として向き付け不可能であるような例を一組挙げよ．また，このような場合には M は向き付け不可能であることを示せ．

テンソル積など

問 4.8. $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ を TM の局所自明化の族とする．このとき，$\{(U_\alpha, {\psi_\alpha}^{\otimes r} \otimes \psi_\alpha^{*\otimes s})\}$ は $T^{r,s}M$ の局所自明化の族であって，変換函数は $({\rho_{\beta\alpha}}^{\otimes r} \otimes ({}^t\rho_{\alpha\beta}^{-1})^{\otimes s})$ で与えられることを示せ．

問 4.9. ω, μ, ν をそれぞれ U 上の対称形式で，次数をそれぞれ p, q, r とする．このとき，

$$\omega \odot \mu = \mu \odot \omega,$$
$$(\omega \odot \mu) \odot \nu = \omega \odot (\mu \odot \nu)$$

がそれぞれ成り立つことを示せ．

問 4.10. ω を U 上の $(0,k)$-テンソル場とする．このとき，$\mathrm{Sym}(\mathrm{Sym}(\omega)) = \mathrm{Sym}(\omega)$ が成り立つことを示せ．

問 4.11. $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \Omega^1(U)$ とする．このとき，

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} (\operatorname{sgn} \sigma) \omega_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\sigma(k)}$$

が成り立つことを示せ．

（以上）