ここでは Hodge star についてごく簡単に述べる．参考文献として

1) 復刊 微分幾何学とゲージ理論，茂木 勇，伊藤 光弘著，共立出版，ISBN 978-4-320-01687-3（「共立講座現代の数学」18 巻 微分幾何学とゲージ理論，ISBN 978-4-320-01135-9 の復刊）
2) リーマン幾何学入門，日評数学選書，オルドジフ・コヴァルスキー著，関沢正躬訳，日本評論社，ISBN 978-4-535-60132-1
3) Tensor Analysis on Manifolds, Richard L. Bishop, Samuel I. Goldberg 著，Dover publications, ISBN 978-0-486-64039-6
4) 一般相対性理論（復刊），物理学選書 15，内山龍雄著，裳華房，ISBN 978-4-7853-2315-8

を挙げておく．手許にあるもので目に付いたものを並べただけなので，もっと優れた文献があるかもしれない．

Hodge star は多様体（曲面を一般化した図形）上で考えるが，計量が定まった線型空間の場合が基本的であるので，まずこれについて述べる．実線型空間の場合には種々のテンソル（添字が上下に色々ついた量）は実数であるが，多様体上で議論する際にはこれらは函数になる．また，複素数や複素数値函数，特に正則函数を扱うことも多い．複素線型空間や複素多様体を扱う際には対称性の代わりにエルミート性を仮定することが少なくない．

12.1. 計量．

定義 12.1. $\mathbb{R}^n$ 上の**計量**とは非退化対称双線型形式のこととする．ここで，以下のように定める．

1) f が $\mathbb{R}^n$ 上の**双線型形式**あるいは双一次形式であるとは，$f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ であって，$v \in \mathbb{R}^n$ を固定すると $w \mapsto f(w,v)$，$w \mapsto f(v,w)$ がいずれも線型写像であることを言う[†1]．
2) $\mathbb{R}^n$ 上の双線型形式 f が**対称**であるとは，$\forall\, v, w \in \mathbb{R}^n,\ f(w,v) = f(v,w)$ が成り立つことを言う．

[†1] $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への線型写像を**線型形式**あるいは**一次形式**と呼ぶ．従って，これらの写像はいずれも線型形式である．

3) $\mathbb{R}^n$ 上の対称双線型形式 f が**非退化**であるとは，$w \in \mathbb{R}^n$ について，$\forall v,\ f(v,w) = 0 \Rightarrow w = 0$ が成り立つことを言う，

定義 12.2 (これはここでの定義である[†2])．f を $\mathbb{R}^n$ 上の計量とする．$\mathbb{R}^n$ 上の二次形式 q を $q(v) = f(v,v)$ により定める．q の符号 $\operatorname{sgn} q$ を f の符号とも呼び，$\operatorname{sgn} f$ で表す．

次が成り立つ（標準的には「線型代数学」で扱ったはずである）．

定理 12.3. q を $\mathbb{R}^n$ 上の二次形式とする．この時，$\mathbb{R}^n$ 上の対称双線型形式であって $q(v) = f(v,v)$ が成り立つ物が一意的に存在する．

そこでしばしば計量を対応する二次形式により与える．

例 12.4. 1) $\mathbb{R}^n$ 上の二次形式 $(dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2$ には標準的なユークリッド計量が対応する．符号は $(n,0)$ である．

2) $\mathbb{R}^{1+n}$ 上の二次形式 $(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - \cdots - (dx^n)^2$ には標準的なローレンツ計量が対応する．符号は $(1,n)$ である．ただし,「標準的なローレンツ計量」を二次形式 $-(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2$ に対応する計量とすることがある．特に n が小さいとき，例えば $n = 3$ の時には符号を $(+---)$ あるいは $(-+++)$ と表すことも多い．

定義 12.5. 1) 符号が $(n,0)$ であるような $\mathbb{R}^n$ 上の計量を**ユークリッド計量**と呼ぶ．

2) 符号が $(1,n)$（流儀によっては $(n,1)$）であるような $\mathbb{R}^{1+n}$ 上の計量を**ローレンツ計量**と呼ぶ．

定義 12.6. M を C^∞ 級の多様体とする．

1) $T_pM,\ p \in M$ 上のユークリッド計量の族 $g = \{g_p\}_{p\in M}$ であって，C^∞ 級であるものを M 上の**リーマン計量**と呼ぶ．

2) $T_pM,\ p \in M$ 上のローレンツ計量の族 $g = \{g_p\}_{p\in M}$ であって，C^∞ 級であるものを M 上の**ローレンツ計量**と呼ぶ．

12.2. **Hodge star.**

Hodge star については，リーマン計量の場合が基本的である．$\mathbb{R}^n$ には標準的な向きが入っているとする．

[†2]「f の符号」というのはある程度一般的な呼称であるが，さしあたりここでの呼称とする．

定義 12.7. $\mathbb{R}^n$ には標準的な向きが定まっているとする．また，g を $\mathbb{R}^n$ 上の一般のリーマン計量とする．このとき，

$$g_{ij}(p) = g_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}_p, \frac{\partial}{\partial x^j}_p\right)$$

とする[†3]．そして

eq12.10_

$$d\mathrm{vol}_g = \sqrt{|\det(g_{ij})|}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \tag{12.8}$$

と置いて[†4]，$\mathbb{R}^n$ の正の向きと g により定まる**体積要素**あるいは**体積形式**と呼ぶ．

注 12.9. 式 (12.8) eq12.10 の「$|\det(g_{ij})|$」の絶対値はリーマン計量を考えるだけならば不要である．後で扱うローレンツ計量などの場合に必要になる．

以下では標準的なリーマン計量やローレンツ計量と標準的な向きを考えるので $d\mathrm{vol}_g = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ あるいは $d\mathrm{vol}_g = dx^0 \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ である．一般には g_{ij} が現れるし，向きを変えれば符号があちらこちらで変わる．

def4.5.4_ **定義 12.10** (Hodge star)**.** g を $\mathbb{R}^n$ の標準的なリーマン計量とする．$U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合，$\omega, \mu \in \Omega^r(U)$ とするとき，

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_r} \omega_{i_1,\ldots,i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r},$$
$$\mu = \sum_{j_1 < \ldots < j_r} \mu_{j_1,\ldots,j_r} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_r}$$

と表して

$$\langle \omega \mid \mu \rangle = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \omega_{i_1,\ldots,i_r} \mu_{i_1,\ldots,i_r}$$

と定める．そして，$\omega \in \Omega^r(U)$ について $*\omega \in \Omega^{n-r}(U)$ を条件

eq4.5.5_

$$\forall\, \mu \in \Omega^r(U),\ \langle \mu \mid \omega \rangle\, d\mathrm{vol}_g = \mu \wedge *\omega, \tag{12.11}$$

ただし $d\mathrm{vol}_g = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$，により定める．$*\colon \Omega^r(U) \to \Omega^{n-r}(U)$ を **Hodge 作用素**あるいは **Hodge star** と呼ぶ．

[†3] g がリーマン計量の場合 $\{g_{ij}\}$ をリーマンテンソルと呼ぶことがあるが，例えば曲率テンソルなど，リーマンテンソルと呼ぶべきテンソルは多いのでやや紛らわしい．

[†4] 添字の数を数えてみると，下付きのものが $2 \times n/2 = n$ 個，上付きのものが n 個で，辻褄が合っている．

注 12.12. $\langle\cdot \mid \cdot\rangle$ は対称双線型形式である．後で g がリーマン計量（正定値）でない場合にも $\langle\cdot \mid \cdot\rangle$ を定めるが，その場合にも同様である．

注 12.13. 条件 (12.11) [eq4.5.5_] はリーマン計量の場合には

eq4.5.5'_ (12.11') [eq4.5.5_]
$$\forall\, \mu \in \Omega^{n-r}(U),\ \langle *\omega \mid \mu\rangle\, d\mathrm{vol}_g = \omega \wedge \mu,$$

としても同値である．講義での計算もこれに合わせたので，以下の記述はローレンツ計量の場合には符号が異なる．

ex4.5.6 **例 12.14.** $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする．

1) $n = 2$ とする．

a) $\omega, \mu \in \Omega^0(U) = C^\infty(U)$ とする．$*\omega \in \Omega^2(U)$ なので $*\omega = \alpha dx^1 \wedge dx^2$ とする．

$$\mu \wedge *\omega = \mu\alpha\, dx^1 \wedge dx^2,$$
$$\langle \mu \mid \omega\rangle = \mu\omega$$

が成り立つ．従って $\alpha = \omega$ なので $*\omega = \omega\, dx^1 \wedge dx^2$ が成り立つ．また，$\omega \wedge *\omega = \omega^2 d\mathrm{vol}_g$ が成り立つ．特に $\omega = 1$ の場合には $*\omega = dx^1 \wedge dx^2$，$\omega \wedge *\omega = d\mathrm{vol}_g$ が成り立つ．

b) $\omega = \omega_{12} dx^1 \wedge dx^2$ とし，$*\omega = \alpha$ とする．$\mu = \mu_{12} dx^1 \wedge dx^2 \in \Omega^2(U)$ について $\mu \wedge *\omega = \mu_{12}\alpha\, dx^1 \wedge dx^2$ が成り立つ．また，$\langle \mu \mid \omega\rangle = \mu\omega_{12}$ が成り立つ．よって $\alpha = \mu_{12}$ が成り立つので，$*\omega = \omega_{12}$ が成り立つ．また，$\omega \wedge *\omega = {\omega_{12}}^2 dx^1 \wedge dx^2$ が成り立つ．a) と合わせて，$r = 0, 2$ については $* * \omega = \omega$ が成り立つ．特に $\omega = dx^1$ あるいは $\omega = dx^2$ の場合には $\omega \wedge *\omega = d\mathrm{vol}_g$ が成り立つ．

c) $\omega = \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2$, $*\omega = \alpha_1 dx^1 + \alpha_2 dx^2$ とする．$\mu = \mu_1 dx^1 + \mu_2 dx^2$ とすると，$\mu \wedge *\omega = (\mu_1\alpha_2 - \mu_2\alpha_1) dx^1 \wedge dx^2$ が成り立つ．一方，$\langle \mu \mid \omega\rangle = \mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2$ が成り立つ．従って $\alpha_1 = -\omega_2$, $\alpha_2 = \omega_1$ なので $*\omega = -\omega_2 dx^1 + \omega_1 dx^2$ が成り立つ．特に $dx^1 = dx^2$, $*dx^2 = -dx^1$ が成り立つ．$r = 1$ については $* * \omega = -\omega$ が成り立つ．また，$\omega \wedge *\omega = ({\omega_1}^2 + {\omega_2}^2) d\mathrm{vol}_g$ が成り立つ．

2) $n = 3$ とする．

a) $\omega = \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2 + \omega_3 dx^3$, $*\omega = \alpha_{23} dx^2 \wedge dx^3 + \alpha_{31} dx^3 \wedge dx^1 + \alpha_{12} dx^1 \wedge dx^2$ とする．$\mu = \mu_1 dx^1 + \mu_2 dx^2 + \mu_3 dx^3$ とすると，$\mu \wedge *\omega = (\mu_1\alpha_{23} + \mu_2\alpha_{31} + \mu_3\alpha_{12}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ が成り立つ．また，$\langle \mu \mid \omega\rangle = \mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2 + \mu_3\omega_3$ なので $\alpha_{23} = \omega_1$, $\alpha_{31} =$

ω_2, $\alpha_{12} = \omega_3$ が成り立つ．よって $*\omega = \omega_1 dx^2 \wedge dx^3 + \omega_2 dx^3 \wedge dx^1 + \omega_3 dx^1 \wedge dx^2$ が成り立つ．

b) $\omega = \omega_{23} dx^2 \wedge dx^3 + \omega_{31} dx^3 \wedge dx^1 + \omega_{12} dx^1 \wedge dx^2$，$*\omega = \alpha_1 dx^1 + \alpha_2 dx^2 + \alpha_3 dx^3$ とする．$\mu = \mu_{23} dx^2 \wedge dx^3 + \mu_{31} dx^3 \wedge dx^1 + \mu_{12} dx^1 \wedge dx^2$ とすると，$\mu \wedge *\omega = (\mu_{23}\alpha_1 + \mu_{31}\alpha_2 + \mu_{12}\alpha_3) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ が成り立つ．また，$\langle \mu \mid \omega \rangle = \mu_{23}\omega_{23} + \mu_{31}\omega_{31} + \mu_{12}\omega_{12}$ なので $\alpha_1 = \omega_{23}$, $\alpha_2 = \omega_{31}$, $\alpha_3 = \omega_{12}$ が成り立つ．よって $*\omega = \omega_{23} dx^1 + \omega_{31} dx^2 + \omega_{12} dx^3$ が成り立つ．a) と合わせて，$r = 1, 2$ について $**\omega = \omega$ が成り立つ．

c) $\omega \in \Omega^0(U)$ について，$*\omega = \omega dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ が成り立つ．また，$\omega = \omega_{123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ について $*\omega = \omega_{123}$ が成り立つ．いずれにしても $**\omega = \omega$ が成り立つ．

3) $n = 4$ とし，ここでは座標は (x^0, x^1, x^2, x^3) とする．

a) $\omega = 1$ とすると，$*\omega = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ が成り立つ．

b) $\omega = dx^\lambda$ とする．α, β, γ を $\{\lambda, \alpha, \beta, \gamma\} = \{0, 1, 2, 3\}$, $\alpha < \beta < \gamma$ により定めると，$*dx^\lambda = (-1)^\lambda dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma$ が成り立つ．

c) $\omega = dx^k \wedge dx^l$, $k < l$ とする．μ, ν を $\{k, l, \mu, \nu\} = \{0, 1, 2, 3\}$, $\mu < \nu$ により定めると，$*dx^k \wedge dx^l = (-1)^{k+l+1} dx^\mu \wedge dx^\nu = (-1)^{\mu+\nu+1} dx^\mu \wedge dx^\nu$ が成り立つ．

d) $\omega = dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma$ とすると $*\omega = (-1)^{\lambda+1} dx^\lambda$ が成り立つ．

e) $\omega = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ とすると $*\omega = 1$ が成り立つ．

4) 一般に，$\omega \in \Omega^r(U)$ について $**\omega = (-1)^{r(n-r)}\omega$ が成り立つ．

問 12.15. 例 ~~12.14~~ ex4.5.6 の計算を定義のみを参照して自力で再現せよ．

ex12.16 **例 12.16** (ローレンツ計量). $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ の座標を (x^0, x^1, x^2, x^3) とする．x^0 は t でも表す．この時

$$\mathrm{dvol}_g = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

が成り立つ[†5]．これを用いて式 (~~12.11~~ eq4.5.5) (定義 ~~12.10~~ def4.5.4) により Hodge star を定めるが，$\langle \omega \mid \mu \rangle$ の定義を一般化する必要がある．具体的には，次のようにする．$\omega, \mu \in \Omega^r(U)$ とし，

$$\omega = dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r},$$

[†5] $\mathrm{dvol}_g = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^0$ とすることもあり，符号が所々逆になる．これは $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ の代わりに $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ を考えた状況であって，$\mathbb{R}^4$ の向きとしては逆の向きを考えている．

$$\mu = dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_r}$$

とする．このとき，$a_{kl} = g_0(e_{i_k}, e_{j_l})$ とし（$e_1, \ldots, e_4$ は $\mathbb{R}^4$ の基本ベクトルとする），$A = (a_{kl})$ として

$$\langle \omega \mid \mu \rangle = \det A$$

と定める．例えば

$$\langle dx^i \mid dx^j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j = 0, \\ -1, & i = j = 1, 2, 3, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

が成り立つ．また，$\delta_{ab} = \begin{cases} 1, & a = b, \\ 0, & a \neq b \end{cases}$ とすれば（クロネッカーのデルタ），$i, j, k, l > 0$ とすると

$$\langle dx^0 \wedge dx^i \mid dx^0 \wedge dx^j \rangle = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\delta_{ij} \end{pmatrix} = -\delta_{ij},$$

$$\langle dx^i \wedge dx^k \mid dx^j \wedge dx^l \rangle = \det \begin{pmatrix} -\delta_{ij} & -\delta_{il} \\ -\delta_{kj} & -\delta_{kl} \end{pmatrix} = \delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & i = j,\ k = l, \\ -1, & i = l,\ k = j, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

が成り立つ．$r = 3, 4$ の場合にも同様に符号に気をつける必要がある．一般には $\omega, \mu \in \Omega^r(U)$ について

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \omega_{i_1, \ldots, i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r},$$
$$\mu = \sum_{j_1 < \cdots < j_r} \mu_{j_1, \ldots, j_r} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_r}$$

と表して，

$$\langle \omega \mid \mu \rangle = \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_r \\ j_1 < \cdots < j_r}} \omega_{i_1, \ldots, i_r} \mu_{j_1, \ldots, j_r} \langle dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \mid dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_r} \rangle$$

と定める．g がリーマン計量である場合と同様に，$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ は対称双線型形式である．

これを踏まえて，ローレンツ計量が定まっている場合の Hodge star を具体的に幾つか計算してみる．

1) $\omega = dx^i$，$*\omega = \sum_{p<q<r} \alpha_{pqr} dx^p \wedge dx^q \wedge dx^r$ とする．$\mu = \sum_{k=0}^{4} \mu_k dx^k$ とすると，$\mu \wedge *\omega = (\mu_0 \alpha_{123} - \mu_1 \alpha_{023} + \mu_2 \alpha_{013} - \mu_3 \alpha_{012}) d\mathrm{vol}_g$ が成り立つ．まず $i = 0$ とする．この時には $\langle \mu \mid \omega \rangle = \mu_0$ が成り立つ．このことから $*dx^0 = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ が成り立つ．

次に $1 \leq i \leq 3$ とする．この時には $\langle \mu \mid \omega \rangle = -\mu_i$ であるから，$1 \leq a < b \leq 3$ を $\{i, a, b\} = \{1, 2, 3\}$ であるように定めると $*dx^i = (-1)^{i+1} dx^0 \wedge dx^a \wedge dx^b$ が成り立つ．

2) $\omega = dx^0 \wedge dx^i$ とする．また，$\mu = \sum_{p<q} \mu_{pq} dx^p \wedge dx^q$ とする．すると $\langle \mu \mid \omega \rangle = -\mu_{0i}$ が成り立つ．このことから，a, b を 1) と同様に定めると $*\omega = (-1)^i dx^a \wedge dx^b$ が成り立つ．$\omega = dx^a \wedge dx^b,\ 1 \leq a < b \leq 3$ とする．このとき，$\langle \mu \mid \omega \rangle = \mu_{ab}$ が成り立つ．よって，i を $\{i, a, b\} = \{1, 2, 3\}$ となるように定めると，$*\omega = (-1)^{i+1} dx^0 \wedge dx^i$ が成り立つ．また，一般に $\omega \in \Omega^2(U)$ について $**\omega = -\omega$ が成り立つ．

3) $\omega = dx^0 \wedge dx^a \wedge dx^b,\ a < b$ とする．$\mu = \sum_{p<q<r} \mu_{pqr} dx^p \wedge dx^q \wedge dx^r$ とすると，$\langle \mu \mid \omega \rangle = \mu_{0ab}$ が成り立つ．i を上のように定めれば $*\omega = (-1)^{i+1} dx^i$ が成り立つ．$\omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ とすると，$\langle \mu \mid \omega \rangle = -\mu_{123}$ であって，$*\omega = dx^0$ である．1) と合わせると，$\omega \in \Omega^r(U),\ r = 1, 3$ について $**\omega = \omega$ を得る．

4) $*1 = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$，$*(dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = -1$ が成り立つ．これらから $\omega \in \Omega^r(U),\ r = 0, 4$ について $**\omega = -\omega$ が従う．

5) 一般に $\omega \in \Omega^r(U)$ について $**\omega = (-1)^{4(4-r)+1} \omega$ が成り立つ．例 ex4.5.6 12.14 と異なるが，これはローレンツ計量の符号が $(1, 3)$ であることに因る（ローレンツ計量にマイナスをつけて符号を $(3, 1)$ としても同じ事が起きる）．

問 12.17. 例 ex12.16 12.16 の計算を定義のみを参照して自力で再現せよ．

複素数を積極的に用いる状況では慎重な扱いが必要になるが，実数しか扱わない状況では次のように考えると取り敢えず便利である．まず (x^0, x^1, x^2, x^3) を $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ の標準的な座標とし，$dz^0 = dx^0,\ dz^i = \sqrt{-1} dx^i, i = 1, 2, 3$，とする[†6]．少なくとも形式的には

$$(dz^0)^2 + (dz^1)^2 + (dz^2)^2 + (dz^3)^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

が成り立つ．一方，体積形式に関しては

$$dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \sqrt{-1} dz^0 \wedge dz^1 \wedge dz^2 \wedge dz^3$$

[†6]数学的には $dz^i = -\sqrt{-1} dx^i$ としない理由はない．このようにすると以下のあちらこちらで符号が変わる．

が成り立つ．これを踏まえて Hodge star をもう一度計算してみる．(z^0, z^1, z^2, z^3) を変数とすれば例 ex4.5.6 12.14 と同様であるが，体積要素が $\sqrt{-1}$ 倍されているので，その分結果がずれて，具体的には $\sqrt{-1}$ 倍される．

1') $\omega = dx^0$ とする．この時には $*dx^0 = *dz^0 = \sqrt{-1}dz^1 \wedge dz^2 \wedge dz^3 = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ が成り立つ．また，$\omega = dx^i$, $1 \leq i \leq 3$ とすると $*dx^i = *(-\sqrt{-1}dz^i) = -\sqrt{-1}*dz^i = -\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}(-1)^i dz^0 \wedge dz^a \wedge dz^b = (-1)^{i+1} dx^0 \wedge dx^a \wedge dx^b$ が成り立つ．ここで，例 ex4.5.6 12.14 の b) において $\lambda = i$，$(\alpha, \beta, \gamma) = (0, a, b)$ とした．

2') $\omega = dx^0 \wedge dx^i$ とする．すると，$*\omega = -\sqrt{-1}*(dz^0 \wedge dz^i) = -\sqrt{-1}\sqrt{-1}(-1)^{i+1} dz^a \wedge dz^b = (-1)^i dx^a \wedge dx^b$ が成り立つ．また，$\omega = dx^a \wedge dx^b$, $1 \leq a < b \leq 3$ とすると，$*\omega = -*(dz^a \wedge dz^b) = -\sqrt{-1}(-1)^{0+i+1}(dz^0 \wedge dz^i) = (-1)^{i+1} dx^0 \wedge dx^i$ が成り立つ．

3') $\omega = dx^0 \wedge dx^a \wedge dx^b$, $a < b$ とする．このとき，$*\omega = *(-dz^0 \wedge dz^b \wedge dz^c) = -\sqrt{-1}(-1)^{i+1} dz^i = (-1)^{i+1} dx^i$ が成り立つ．また，$\omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ とすると，$*\omega = *(\sqrt{-1}dz^1 \wedge dz^2 \wedge dz^3) = \sqrt{-1}\sqrt{-1}(-dz^0) = dx^0$ が成り立つ．

4') $\omega = 1$ とすると，$*\omega = \sqrt{-1}dz^0 \wedge dz^1 \wedge dz^2 \wedge dz^3 = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ が成り立つ．また，$*(dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = *(\sqrt{-1}dz^0 \wedge dz^1 \wedge dz^2 \wedge dz^3) = \sqrt{-1}\sqrt{-1}1 = -1$ が成り立つ．

12.3. **Hodge star の基本的な性質と余微分.**

ここまで調べたことから，次が従う．

lem12.16 **補題 12.18.** g を $\mathbb{R}^4\,(= \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ 上のリーマン計量あるいはローレンツ計量とする．g がリーマン計量の場合には $\sigma = 0$，ローレンツ計量の場合には $\sigma = 1$ とする．このとき，$\omega \in \Omega^r(U)$ について

$$**\omega = (-1)^{r(4-r)+\sigma}\omega$$

が成り立つ．より一般に，$\operatorname{sgn} g = (\rho, \sigma)$ とするとき，$**\omega = (-1)^{r(n-r)+\sigma}\omega$ が成り立つ．

補題 12.19. $\omega, \mu \in \Omega^r_c(U)$ とすると

$$\langle *\mu \mid *\omega \rangle = (-1)^\sigma \langle \mu \mid \omega \rangle$$

が成り立つ．

証明. 補題 lem12.16 12.18 により $\langle *\mu \mid *\omega\rangle d\mathrm{vol}_g = *\mu\wedge**\omega = (-1)^{r(4-r)+\sigma}*\mu\wedge\omega = (-1)^{\sigma}\omega\wedge*\mu = \langle\omega \mid \mu\rangle\, d\mathrm{vol}_g$ が成り立つので $\langle *\mu \mid *\omega\rangle = (-1)^{\sigma}\langle\omega \mid \mu\rangle$ が成り立つ．一方，g は対称なので $\langle\omega \mid \mu\rangle = \langle\mu \mid \omega\rangle$ が成り立つ． □

多様体上では以下のように定める．まず

$$\Omega_c^r(U) = \{\omega \in \Omega^r(U) \mid \text{ある有界閉集合 } K \subset U \text{ が存在して } \omega \text{ は } U \setminus K \text{ 上 } 0 \text{ に等しい}\}$$

と置く．もし M が閉多様体ならば $\Omega_c^r(M) = \Omega^r(M)$ である．本来念頭にあるのはこの場合なので，漠然と「境界のない連結な有界閉集合」上で話を進めていると考えれば良い．さて，$\Omega_c^r(U)$ に以下のように計量を定める．

定義 12.20. $\omega, \mu \in \Omega_c^r(U)$ について

$$(\mu \mid \omega) = \int_U \mu\wedge*\omega = \int_U \langle\mu \mid \omega\rangle\, d\mathrm{vol}_g$$

と定める．

実際には $\mu\wedge*\omega \in \Omega_c^n(U)$ ならば $(\mu \mid \omega)$ は定まる．

一般に，$(\cdot \mid \cdot)$ は対称双線型形式である．特に g がリーマン計量であれば $(\cdot \mid \cdot)$ はユークリッド計量である．g をローレンツ計量とする．$dx^i, dx^i\wedge dx^j$ などは必ずしも $\Omega_c^*(U)$ の元ではないが，大雑把に性質を挙げておく．

$(dx^0 \mid dx^0) > 0,$ $\quad (dx^i \mid dx^i) < 0,$
$(dx^0\wedge dx^i \mid dx^0\wedge dx^i) < 0,$ $\quad (dx^a\wedge dx^b \mid dx^a\wedge dx^b) > 0,$
$(dx^0\wedge dx^a\wedge dx^b \mid dx^0\wedge dx^a\wedge dx^b) > 0,$
$(dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3 \mid dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3) < 0,$
$(1 \mid 1) > 1,$
$(dx^0\wedge dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3 \mid dx^0\wedge dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3) < 0$

が成り立つ．符号は dx^1, dx^2, dx^3 が幾つ含まれているかにより定まる．

Hodge star を用いて以下のように定める．

定義 12.21. $\delta\colon \Omega^r(U) \to \Omega^{r-1}(U)$ を

$$\delta = \begin{cases} (-1)^r *^{-1} d\,*, & r > 0, \\ 0, & r = 0 \end{cases}$$

により定め，**余微分**と呼ぶ.

補題 12.22. $r > 0$ とすると $\delta = (-1)^{nr+n+1+\sigma} * d\,*$ が成り立つ.

証明. $k(k-1)$ は偶数であるから，$(-1)^{k^2} = (-1)^k$ が成り立つ．$\omega \in \Omega^r(U)$ について，$d{*}\omega \in \Omega^{n-r+1}(U)$ であるから，補題 lem12.16 12.18 により $\delta = (-1)^r(-1)^{(n-r+1)(n-(n-r+1))+\sigma} {*}d{*} = (-1)^{r+(n-r+1)(r-1)+\sigma} * d{*} = (-1)^{r+nr-n-r+1+\sigma} * d{*} = (-1)^{nr+n+1+\sigma} * d\, *$ が成り立つ． □

定理 12.23. $(d\omega \mid \mu) = (\omega \mid \delta\mu)$ が任意の $\omega \in \Omega_c^{r-1}(U)$, $\mu \in \Omega_c^r(U)$ について成り立つ．

証明.

$$\begin{aligned}
(d\omega \mid \mu) &= \int_U d\omega \wedge {*}\mu \\
&= \int_U (d(\omega \wedge {*}\mu) - (-1)^{r-1}\omega \wedge d * \mu) \\
&= 0 + (-1)^r \int_U \omega \wedge * *^{-1} d * \mu \\
&= (\omega \mid (-1)^r *^{-1} d * \mu) \\
&= (\omega \mid \delta\mu)
\end{aligned}$$

が成り立つ． □

12.4. **ラプラシアン．**

定義 12.24. $\Delta = d\delta + \delta d \colon \Omega^r(U) \to \Omega^{n-r}(U)$ を**ラプラス作用素**，**ラプラシアン**と呼ぶ．また，$\omega \in \Omega^r(U)$ が $\Delta\omega = 0$ を満たすとき，ω を**調和 $\boldsymbol{r}$-形式**と呼ぶ．調和 0-形式を特に**調和函数**と呼ぶ．

例 12.25. $\mathbb{R}^n$ に標準的なリーマン計量（g で表す）と標準的な向きを入れる．また，$U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする．

1) $f \in \Omega^0(U)$ とする．$df = \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ が成り立つから，

$$\begin{aligned}
\delta df &= (-1)^{n+n+1} * d * df \\
&= - * d \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n \right), \\
&= - * \left(\sum_{i,j} (-1)^{i+1} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n \right) \\
&= - * \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \right)
\end{aligned}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^i}$$

が成り立つ．ただし $\widehat{dx^i}$ は dx^i を取り除くことを意味する．一方，$\delta f \in \Omega^n(U)$ なので $d\delta f \in \Omega^{n+1}(U) = \{0\}$ が成り立つ．従って $d\delta f = 0$ が成り立つ．よって $\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^i}$ が成り立つ[†7]．また，$\operatorname{grad} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial f}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x^3}\frac{\partial}{\partial x^3}$ であるから，$\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \nabla \cdot (\nabla f) = -\Delta f$ が成り立つ（問 q12.24 12.26 も参照のこと）．この意味で $\nabla \cdot \nabla = -\Delta$ が成り立つ．

2) $n = 3$ とし，$\mathfrak{X}(U)$ で U 上の C^∞ 級のベクトル場全体を表す．$X = f^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + f^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + f^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \in \mathfrak{X}(U)$ とする．一般に，$Z = \sum_{i=1}^{3} h^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(U)$ について，$\eta_Z = \sum_{i=1}^{3} h^i dx^i$ と定める[†8]．$\omega = \eta_X$ とすれば $\omega = f^1 dx^1 + f^2 dx^2 + f^3 dx^3$ が成り立つ（講義では ω を X に対応する 1-形式と呼んだ）．すると，

$$\begin{aligned}
*d\omega &= \left(\frac{\partial f^3}{\partial x^2} - \frac{\partial f^2}{\partial x^3}\right) dx^1 + \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^3} - \frac{\partial f^3}{\partial x^1}\right) dx^2 + \left(\frac{\partial f^2}{\partial x^1} - \frac{\partial f^1}{\partial x^2}\right) dx^3 \\
&= \eta_{\operatorname{rot} X}
\end{aligned}$$

が成り立つ．従って，η を $Z \in \mathfrak{X}(U)$ に対して $\eta_Z \in \Omega^1(U)$ を対応させる写像と見做せば

$$\operatorname{rot} = \eta^{-1} * d \circ \eta$$

が成り立つ．従って $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} X) = (\eta^{-1} * d \circ \eta) \circ (\eta^{-1} * d \circ \eta) X = \eta^{-1} * d * d\eta_X$ が成り立つ．ところで，$\Omega^1(U)$ 上では $*d*d = (-1)^{3\cdot 2+3+1} * d * d = \delta d$ が成り立つので

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} X) = \eta^{-1}\delta d\eta_X = \eta^{-1}(\Delta\eta_X - d\delta\eta_X)$$

が成り立つ．一方，

$$\begin{aligned}
d\delta\eta_X &= d\delta\left(f^1 dx^1 + f^2 dx^2 + f^3 dx^3\right) \\
&= -d * d * \left(f^1 dx^1 + f^2 dx^2 + f^3 dx^3\right) \\
&= -d * d\left(f^1 dx^2 \wedge dx^3 + f^2 dx^3 \wedge dx^1 + f^3 dx^1 \wedge dx^2\right) \\
&= -d * \left((\operatorname{div} X) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3\right)
\end{aligned}$$

[†7] 通常の（函数に関する）ラプラシアンと符号が異なるように見えるが，こちらをラプラシアンとすることも多い．

[†8] これは $Y \in \mathfrak{X}(U)$ について $\eta_Z(Y) = g(Z, Y)$ と定めることと同値である．η（あるいは g）は $\mathfrak{X}(U)$ と $\Omega^1(U)$ の間の $C^\infty(U)$-加群としての同型を定める．

$$= -d(\operatorname{div} X)$$

が成り立つから，$\eta^{-1} d\delta\eta_X = -\operatorname{grad}(\operatorname{div} X)$ が成り立つ（問 q12.24 12.26 も参照のこと）．古典的には（標準的なベクトル解析の記法では）$-\eta^{-1}\Delta\eta_X$ を $\nabla^2 X$ で表す[†9]．実際，1) を踏まえて $\nabla^2 X = -(\Delta f^1)\dfrac{\partial}{\partial x^1} + (\Delta f^2)\dfrac{\partial}{\partial x^2} + (\Delta f^3)\dfrac{\partial}{\partial x^3} = -\Delta X$ と定める（符号はここでの定義に合わせている）．すると，

$$\begin{aligned}
&\Delta\eta_X \\
&= (d\delta + \delta d)(f^1 dx^1 + f^2 dx^2 + f^3 dx^3) \\
&= -d * d * (f^1 dx^1 + f^2 dx^2 + f^3 dx^3) + *d * d(f^1 dx^1 + f^2 dx^2 + f^3 dx^3) \\
&= -d * d(f^1 dx^2 \wedge dx^3 + f^2 dx^3 \wedge dx^1 + f^3 dx^1 \wedge dx^2) \\
&\quad + *d * \left(\left(\frac{\partial f^3}{\partial x^2} - \frac{\partial f^2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^3} - \frac{\partial f^3}{\partial x^1} \right) dx^3 \wedge dx^1 + \left(\frac{\partial f^2}{\partial x^1} - \frac{\partial f^1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 \right) \\
&= -d(\operatorname{div} X) + *d \left(\left(\frac{\partial f^3}{\partial x^2} - \frac{\partial f^2}{\partial x^3} \right) dx^1 + \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^3} - \frac{\partial f^3}{\partial x^1} \right) dx^2 + \left(\frac{\partial f^2}{\partial x^1} - \frac{\partial f^1}{\partial x^2} \right) dx^3 \right) \\
&= -d(\operatorname{div} X) + *d \left(\left(\frac{\partial f^3}{\partial x^2} - \frac{\partial f^2}{\partial x^3} \right) dx^1 + \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^3} - \frac{\partial f^3}{\partial x^1} \right) dx^2 + \left(\frac{\partial f^2}{\partial x^1} - \frac{\partial f^1}{\partial x^2} \right) dx^3 \right) \\
&= -d(\operatorname{div} X) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x^1}(\operatorname{div} X) dx^1 + \Delta f^1 dx^1 \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial x^2}(\operatorname{div} X) dx^2 + \Delta f^2 dx^2 \\
&\qquad\quad + \frac{\partial}{\partial x^3}(\operatorname{div} X) dx^3 + \Delta f^3 dx^3 \\
&= \Delta f^1 dx^1 + \Delta f^2 dx^2 + \Delta f^3 dx^3 \\
&= \eta_{\Delta X}
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} X) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} X) + \Delta X$$

が成り立つ．

微分形式との対応を踏まえると，grad の後には rot が，rot の後には div しか現れないのが自然であるが，Hodge star により $\Omega^2(U)$ と $\Omega^1(U)$ が同一視されるので例えば rot が続けて現れたり，grad の後に div が現れたりする．あるいは $\Omega^r(U)$ の元についての外微分を d_r で表すことにすると，d_r の後には d_{r+1} が現れるのが自然

[†9] 古典的あるいは通用している記法に通暁することは大切なことであるが，そのような記法が理論的に簡潔であるとは限らない．余計な混乱が無いような理解をすることが大切である．適切な方法は各々で異なる．古典的な方法が合っている場合もあるし，そうでない場合もある．

であるが，$\omega \in \Omega^1(U)$ について $*d_1\omega \in \Omega^1(U)$ であるから，$d_1 * d_1\omega$ を考えることができる，としても同様である．

q12.24 **問 12.26.** $\operatorname{grad} f = \eta^{-1}df$, $\operatorname{div} X = *d*\eta_X = -\delta\eta_X$ が成り立つことを示せ．また，$\operatorname{div}\operatorname{grad} f = -\Delta f$ が成り立つことを直接的なテンソル計算をせずに（$\operatorname{grad} f$ を具体的に書き下して計算することなしに）示せ．

問 12.27. $\mathbb{R}^n$ 上の計量 g について $\operatorname{sgn} g = (\rho, \sigma)$ とする．ここまでの計算が正しいことを確かめよ．

ラプラシアンは次の意味でも自然である．$n = 2$ とする．$\mathbb{R}^2$ の座標を (x, y) とすると $\Delta = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ が成り立つ．ここで (x, y) と $z = x + \sqrt{-1}y$ を同一視すると

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{4}\Delta$$

が成り立つ．

定理 12.28. $U \subset \mathbb{C}$ を開集合とし，$f \colon U \to \mathbb{C}$ を正則とする．このとき，$f = u + \sqrt{-1}v$ と実函数 u, v を用いて表すと $\Delta u = \Delta v = 0$ が成り立つ．即ち，u, v は調和函数である．

u と v は独立ではなく，しばしば共軛と呼ばれる関係にある．これに関しては（複素）函数論の教科書にあたること．また，定理の証明は演習問題とする．

特に不定値の場合に Hodge star の計算に慣れるためには手を動かすのがよい．

問 12.29. $\mathbb{R}^2$ の座標を (x^0, x^1) とし，にローレンツ計量 $g = (dx^0)^2 - (dx^1)^2$ を入れる．また，向きは標準的なものとする．このとき，$\mathbb{R}^2$ 上の Hodge star を具体的に計算せよ．

12.5. **進んだ話題.**

ここでは多様体はパラコンパクトとする．

問 12.30. M を多様体とする．M 上にリーマン計量が存在することを示せ．

一方，ローレンツ計量については次が成り立つ．

定理 12.31. M を閉多様体（コンパクト，連結であって境界が空であるもの）とする．M 上にローレンツ計量が存在するならば，M のオイラー数は 0 である．

証明には幾つか道具が要るのでここでは省略する．

問 12.32. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$ と置く．D 上のリーマン計量 g を $p = (x,y) \in D$ について

$$g_p = \frac{4((dx)^2 + (dy)^2)}{1 - x^2 - y^2}$$

により定める（二次形式と対称双線型形式の対応を用いている）．このとき，$\Delta\colon \Omega^r(U) \to \Omega^r(U)$ を具体的に表せ．

※ $g = \{g_p\}$ は **Poincaré 計量**と呼ばれる．

（以上）