２０１７年度数理科学基礎II（理I 24–27 組向け，足助担当）演習問題 ７ v3 2017/5/22（月）

’17/5/22 : 問 7.4 の 2) の積分の変数を修正．問 7.4 と例 7.6 を追加．以降の番号を変更．逐次近似法に関する記述を追加．

’17/5/22 : 問 7.5 を追加．以降の番号を変更．例 7.7 の 2) において，$F(f)$ の変数が u のままであったのを修正．

’17/6/1 : 例 7.7 の 1) の誤植を修正．

問 7.1. $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合，$f \colon U \to \mathbb{R}^m$ を写像とする．f は a において全微分可能であるとする．$v \in \mathbb{R}^n$ とすると，f は a において v 方向に微分可能であって，$D_v f(a) = Df(a)v$ が成り立つことを示せ．特に，$v \in \mathbb{R}^n$ に $D_v f(a)$ を与える対応を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像とみなすと，これは $\mathbb{R}$-線型写像であることを確かめよ．

問 7.2. $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ とし，$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ とする．$D^i f(0) = \dfrac{d^i f}{dx^i}(0),\ 0 \leq i \leq n$ を求めよ．

問 7.3. $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ とする．$f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を $f(v) = f(v_1, \dots, v_n) = A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ により定めると，f は $\mathbb{R}^n$ 上で微分可能であって，$Df(v) = A$ が（v によらず）成り立つことを示せ．

問 7.4. $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ とし，A の (i,j) 成分を a_{ij} とする．このとき $\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$ と定める．$B \in M_{n,l}(\mathbb{R})$ とすると，$\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$ が成り立つことを以下に従って示せ．

$\mathbb{R}^n$ の標準的なユークリッド計量を $\langle \cdot | \cdot \rangle$ で表すことにし，これに関するノルム（$\mathbb{R}^n$ の標準的なノルム）を $\|\cdot\|'$ で表す．

1) $\mathbb{R}^n = M_{n,1}(\mathbb{R})$ であるので，$v \in \mathbb{R}^n$ について $\|v\|$ が定まるが，$\|v\| = \|v\|'$ が成り立つことを示せ．また，$v, w \in \mathbb{R}^n$ について $\langle v \mid w \rangle = {}^t v w$ が成り立つことを示せ．
2) $m = l = 1$ とする．
   a) $a = {}^t A$，$b = B$ と置くと，$\|AB\| = |\langle a \mid b \rangle|$, $\|A\| = \|a\|$, $\|B\| = \|b\|$ が成り立つことを示せ．
   b) シュワルツの不等式を用いて $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$ が成り立つことを示せ．
      ※ 予習になると思うが，いずれ線型代数で必ず扱うので教科書等で調べると良い．
3) 一般の場合を考える．

a) ${}^tA = (a_1 \ \cdots \ a_m)$, $B = (b_1 \ \cdots \ b_l)$ と区分けすると，$\|AB\|^2 = \sum_{i,j} |\langle a_i|b_j\rangle|^2 \leq \sum_{i,j} \|a_i\|^2 \|b_j\|^2$ が成り立つことを示せ.

b) $\|A\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \|a_i\|^2$, $\|B\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|b_j\|^2$ が成り立ち，$\sum_{i,j} \|a_i\|^2 \|b_j\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2$ が成り立つことを示せ.

問 7.5. $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ とする．$f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を $v = (v_1, \ldots, v_n)$ について $f(v) = A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ により定めると，f はリプシッツ連続であって，リプシッツ定数は $\max\{|a_{ij}|\}$ に等しいことを示せ.

微分方程式について（２）

問 7.6. f, ψ を t の函数とする．ここで f を一旦変数と考え，φ を f の函数とする．t の函数 f についての微分方程式

$$(*) \qquad \frac{df}{dt}(t) = \varphi(f(t))\psi(t), \quad f(0) = c$$

について，以下の問に答えよ．なお，φ, ψ は $\mathbb{R}$ 全体で定まっているとする．また，φ は 0 にならないと仮定する.

1) φ を f の函数と考えて

$$F(f) = \int_c^f \frac{1}{\varphi(u)} du$$

と置く．$F(f(t)) = \int_0^t \frac{df}{dt}(s) \frac{1}{\varphi(f(s))} ds$ が成り立つことを示せ.

2) F を f の函数とみなしたときの逆函数を G とする．$\Psi(t) = \int_0^t \psi(s) ds$ と置き，$g(t) = G(\Psi(t))$ とすると，g は $(*)$ の解であることを示せ.

※ 理屈の上では解は求まるが，具体的に計算しようとすると F, G や Ψ が求まらないとうまく行かない.

例 7.7. 1) $\frac{df}{dt}(t) = f(t)$, $f(0) = 1$ を解いてみる．$\varphi(f) = f$, $\psi(t) = 1$（定数函数），$c = 1$ とした場合であるから，φ は $f = 0$ で 0 を取るが，$f > 0$ の範囲で考えることにすれば

$$F(f) = \int_1^f \frac{1}{\varphi(u)} du = \log f,$$
$$\Psi(t) = \int_0^t \psi(s) ds = t$$

が成り立つ．従って $G(x)=e^x$ が成り立つ．$x=\Psi(t)$ とすれば $g(t)=G(\Psi(t))=e^t$ を得る．この g について言えば，$f>0$ としたことと辻褄は合っているが，$f=0$ となる（$\varphi(f)=0$ となる）場合については考察が足りないので，何らかの手段で補う必要がある[†1]．

2) $\dfrac{df}{dt}(t)=-\dfrac{t}{f(t)},\ f(0)=1$ を解いてみる．$\varphi(f)=\dfrac{1}{f},\ \psi(t)=t,\ c=1$ とした場合である．$f(t)>0$ とすると，

$$\begin{aligned} F(f)&=\int_1^f \frac{1}{\varphi(u)}du=-\int_1^f udu=-\frac{1}{2}f^2+\frac{1}{2},\\ \Psi(t)&=\int_0^t \psi(s)ds=\frac{1}{2}t^2 \end{aligned}$$

が成り立つ．従って $G(x)=\sqrt{1-2x}$ あるいは $G(x)=-\sqrt{1-2x}$ が成り立つから，$g(t)=\sqrt{1-t^2}$ あるいは $g(t)=-\sqrt{1-t^2}$ が成り立つ．実際に微分してみればいずれの g も $\dfrac{dg}{dt}(t)=-\dfrac{t}{g(t)}$ を満たすことが分かる．最初に課した条件 $f(t)>0$ を満たすのは $g(t)=\sqrt{1-t^2}$ の方であるが，さらに $|t|<1$ でないといけない．結局，求まった解は $f(t)=\sqrt{1-t^2},\ |t|<1$ である．この場合にも，G は $|x|\le 1$ でないと定義されないであるとか，$f(t)>0$ と決め打ちしているといった問題がある．外の解がないこと（実際にはない）も含めて，これらのことについて付加的な考察が要る．

$I\subset\mathbb{R}$ を開区間，$f\colon I\to\mathbb{R}$ とする．また，$c\in I,\ a_0,a_1,\ldots\in\mathbb{R}$ とする．$x\in I$ について

$$\begin{aligned} f(x)&=\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=0}^{m}a_n(x-c)^n\\ &=a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+\cdots\\ &=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-c)^n \end{aligned}$$

が成り立つとする．最初の等号は定義で，下二行は略記である．また，$(x-c)^0=1$ と約束する．このように表すことができる函数も，できない函数もあるが，これについては後日扱う．

ここではさらに

$$Df(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}na_n(x-c)^{n-1}$$

が成り立ち，また，D^nf も同様に計算できると<u>仮定する</u>（e^x や $\sin x,\cos x$ などはこのような性質を持つ．これについても後日扱う）．ここで $D^0f=f,\ D^nf=D(D^{n-1}f)$ と帰納的に定める．

[†1] 「常微分方程式」で扱うのでここではこれで満足することにする．

問 7.8. $a_n = \dfrac{D^n f(c)}{n!}$ が成り立つことを示せ.

問 7.9. $a, b \in \mathbb{R}$ とし，f を $Df = af,\ f(0) = b$ の解とする（実際には $f(x) = be^{ax}$ が成り立つ）．ここでは f が上のような性質を持つと仮定し，$f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ が成り立つとする.

1) $a_n = \dfrac{ba^n}{n!}$ が成り立つことを示せ.

   ヒント：$Df(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ が成り立つ.

2) e^x が上に述べたような性質を持つとすると，$e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$ が成り立つことを示せ．また，$f(x) = be^{ax}$ が成り立つことを示せ.

※ 簡単に解けたように見えるが，解が上に述べたような性質を持つことを，何らかの方法で確かめておかないといけない．また，一般には a_n は複雑な形をしているので，$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$ がどのような函数なのか，すぐに分かるとは限らない.

問 7.10. 以下の函数について $\dfrac{D^n f(0)}{n!}$ を求めよ.

1) $f(x) = \cos x$
2) $f(x) = \sin x$
3) $f(x) = \tan x$
4) $f(x) = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

微分方程式 $\dfrac{df}{dt}(t) = f(t),\ f(0) = c$ は次のようにしても解ける．どのような方程式についてこの方法が適用できるかは「常微分方程式」で扱う.

まず $f_0(t) = c$ を f の候補とする．f_0 は解ではないが，$\varphi(f, t) = f(t)$ として（左辺の f は変数と考える）

$$f_1(t) = c + \int_0^t \varphi(f_0, s) ds = c + \int_0^t f_0(s) ds = c + ct$$

とする．f_1 も解ではないが,

$$f_2(t) = c + \int_0^t \varphi(f_1, s) ds = c + \int_0^t f_1(s) ds = c + ct + \frac{1}{2}ct^2$$

とする.

問 7.11. 帰納的に

$$f_n(t) = c + \int_0^t \varphi(f_{n-1}, s) ds$$

とすると，$f_n(t) = c\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}t^k$ が成り立つことを示せ．

f_n も依然として解ではないが，

$$f(t) = \lim_{n\to+\infty} f_n(t)$$

とする．どうしてそうなるかはともかく，$f(t) = ce^t$ が成り立ち，これは求める解である．このような解き方は**逐次近似法**と呼ばれる．より詳しく，

$$\frac{df}{dt} = \varphi(f, t)$$

の形をした微分方程式（**正規形**の微分方程式と呼ばれる）において，φ が一定の条件をみたすと逐次近似法が適用できて，解が求まる．逐次近似法は理論的な目的に限らず，例えば数値計算（ある程度の誤差を許容して，計算機などを用いて具体的な値を求めること）をしようとする際などにも有用である（逐次近似法で求まる解の収束は一般に比較的良い）．

（以上）