２０１７年度微分積分学（理 I 24–27 組向け，足助担当）演習問題 20 v4　’17/11/13（月）
’17/11/13：問 20.5 に一問追加．
’17/11/16：問 20.9 を修正．
’17/11/20：問 20.3 の誤植と問 20.6 を修正．

問 20.1 (問 20.8 も参照のこと)．$X \subset \mathbb{R}^n$ を有界とする．$c \in \mathbb{R}^n$ について $X_c = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in X,\ y = x + c\}$ と定める．X が体積確定であることと，X_c が体積確定であることは同値であって，これらが体積確定ならば $v(X) = v(X_c)$ が成り立つことを示せ．

問 20.2 (問 20.1 も参照のこと)．$X \subset \mathbb{R}^n$ を有界とする．$A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ について $X_A = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in X,\ y = Ax\}$ と定める．X が体積確定であることと，X_A が体積確定であることは同値であって，これらが体積確定ならば $v(X) = v(X_A)$ が成り立つことを示せ．

問 20.3 (カヴァリエリの原理)．$X, Y \subset \mathbb{R}^n$ を有界な体積確定集合とする．また，n 次元体積を v_n で表す．$z \in \mathbb{R}$ について

$$X_z = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in X \mid x_n = z\},$$
$$Y_z = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in Y \mid x_n = z\}$$

とおくと，X_z, Y_z は共に体積確定であって，$\forall\, z \in \mathbb{R},\ v_{n-1}(X_z) = v_{n-1}(Y_z)$ が成り立つとする（$v_{n-1}(\varnothing) = 0$ と定める）．この時，$v_n(X) = v_n(Y)$ が成り立つことを示せ（$v_n(\varnothing) = 0$ と定める）．特に，$\forall\, z \in \mathbb{R},\ \exists\, c = c_z \in \mathbb{R},\ Y_z = X_z + c\,(= \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in X,\ y = x + c\})$ が成り立つならば $v_n(X) = v_n(Y)$ が成り立つことを示せ．

問 20.4. $K_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq 1\}$ とする．

1*) K_n は有界閉集合であることを示せ．
2) $v(K_n) = \displaystyle\int_{K_n} dx_1 \cdots dx_n = \int_{0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq 1} dx_1 \cdots dx_n$ を求めよ．
3) K_n を図示せよ．
※ 場合によっては $K'_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 1 \geq x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0\}$ を考えたほうがわかりやすい．

※ この積分は**反復積分**と呼ばれるものの一番簡単な例の一つである．

問 20.5. 次の積分を求めよ．

1) $\displaystyle\int_D dxdy$，$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

2) $\displaystyle\int_D dxdy$，$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 4\}\setminus\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}$.

3) $\displaystyle\int_D dxdy$，$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 4\}\setminus\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2\leq 1\}$.

問 20.6. $S^n=\{(x_0,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1} \mid {x_0}^2+\cdots+{x_n}^2=1\}$，$D^n=\{(x_0,\ldots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^n \mid {x_0}^2+\cdots+x_{n-1}^2\leq 1\}$ とし，$\varphi\colon D^n\to S^n$ を

$$\varphi(x_0,\ldots,x_{n-1})=(x_0,\ldots,x_{n-1},\sqrt{1-{x_0}^2-\cdots-{x_{n-1}}^2})$$

により定める．また．$f\colon\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ を

$$f(x_0,\ldots,x_n)=\frac{x_0}{{x_0}^2+\cdots+{x_n}^2}$$

により定め，

$$I=\int_{D^n} f\circ\varphi(x_0,\ldots,x_{n-1})\frac{\partial\sqrt{1-{x_0}^2-\cdots-{x_{n-1}}^2}}{\partial x_0}dx_0\cdots dx_{n-1}$$

と置く.

1) 添字を入れ替えても積分 I は変化しないことを示せ．即ち，$\sigma\in\mathfrak{S}_{n+1}$ とし，

$$I_\sigma=\int_{D^n_\sigma} f\circ\varphi(x_{\sigma(0)},\ldots,x_{\sigma(n-1)})\frac{\partial\sqrt{1-{x_{\sigma(0)}}^2-\cdots-{x_{\sigma(n-1)}}^2}}{\partial x_{\sigma(0)}}dx_{\sigma(0)}\cdots dx_{\sigma(n-1)},$$

ただし $D^n_\sigma=\{(x_{\sigma(0)},\ldots,x_{\sigma(n-1)})\in\mathbb{R}^n \mid {x_{\sigma(0)}}^2+\cdots+x_{\sigma(n-1)}^2\leq 1\}$，とすると $I_\sigma=I$ が成り立つことを示せ.

2) I を求めよ．

ヒント：$\sigma_k=(0\ k)$ とする[†1]．$I_{\sigma_0}+I_{\sigma_1}+\cdots+I_{\sigma_n}$ を考えてみよ．現時点では変数変換を用いるのが標準的であるが，興味があれば Gaußの発散定理を用いた計算も試みよ．定義には「北半球」しか現れないが,「南半球」もうまく用いると良い.

問 20.7. $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}^3$ とし，$a_i=(x_i,y_i,z_i)$ とする．また，a_1,a_2,a_3 は線型独立とする．四面体 $o\,a_1a_2a_3$ の境界及び内部を X とするとき，X の体積を求めよ．ただし，$o=(0,0,0)$ は原点とする.

※ 積分を用いなくとも計算できるが，積分を用いた計算もしてみること．なお，問 20.9 を用いても解けるし，ここでは用いて構わないが，本来はこれは本末転倒である[†2].

[†1] 0 と k を入れ替える置換をこのように表すことがある．このように，二つのことなる文字を入れ替える置換を**互換**と呼ぶ.

[†2] 少なくとも講義での証明に従うと，循環論法に陥る.

問 20.8 (問 20.1 も参照のこと)．$X \subset \mathbb{R}^n$ を有界とする．$A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ について $X_A = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in X,\ y = Ax\}$ と定める．X が体積確定であることと，X_A が体積確定であることは同値であって，これらが体積確定ならば $v(X) = v(X_A)$ が成り立つことを示せ．

問 20.9. $X \subset \mathbb{R}^n$ を有界な体積確定集合とする[†3]．$f\colon X \to \mathbb{R}$ を連続とし，また，$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ とする．$X_A = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in X,\ y = Ax\}$ とすると

$$\int_{X_A} f(A^{-1}x)dx = \int_X f(x)\,|\det A|\,dx$$

が成り立つことを示せ．

（以上）

[†3] おまじないと思っていれば良い（本当は積分が定まることを保証するのに用いているが，解くのに表だって用いる必要はない）．