２０１７年度微分積分学（理 I 24–27 組向け，足助担当）演習問題 １０ v2 2017/6/20（火）
'17/6/20：一部 O_n, SO_n のフォントが正しくなかったので修正.

問 10.1. $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ とし（A を正則な n 次実行列とし），$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $f(x) = Ax$ により定める．ここで $x \in \mathbb{R}^n$ は列ベクトルとみなしている．f は C^∞ 級の微分同相写像であることを示せ．また，f^{-1} を求めよ．

問 10.2. 以下のように $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, p を定める．また，$l = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = f(p)\}$ とする．$q \in l$ について $Df(l) \neq 0$（零ベクトル）が成り立つことを示せ．また，q を含む開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$，開区間 $I \subset \mathbb{R}$ と C^1 級の微分同相写像 $\varphi\colon I \to l \cap U (\ni p)$ であって $f(\varphi(t)) = f(p)$ が成り立つものを一組定めよ．なお，実際には U は q を中心とする開球（開円板）に取れるので，初めから開球を考えても良い．
ヒント：U, I を定めると φ は一意的（このことは認めて良い）なので，解けるのであれば $f(x,y) = f(p)$ を x あるいは y に関して解いてしまえば良い．すぐに解けない場合には工夫が要る．

1) $f(x,y) = ax + by + c$，ただし $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a,b) \neq (0,0)$ とする．
2) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $p = (0,1)$
3) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $p = (1,0)$
4) $f(x,y) = 4x^2 + y^2$, $p = (1,0)$

定義 10.3. $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．このとき
$$\exp A = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} A^m$$
と置き，exp を**指数函数**，**指数写像**と呼ぶ．ここで，$A \in M_n(\mathbb{C})$ について $A^0 = E_n$ と定める．

$\exp A \in M_n(\mathbb{C})$ が成り立つ（定義にある級数は収束する）．このことは本来は示すべきであるが，ここでは認める．$A \in M_n(\mathbb{R})$ ならば，級数に表れる行列は全て実行列なので，$\exp A \in M_n(\mathbb{R})$ が成り立つ．

問 10.4. 級数に関する計算は，収束（するかどうか）の問題を無視して形式的に行って良いことにして，以下を示せ．

1) $A = (a) \in M_1(\mathbb{R})$ とすると，$\exp A = e^a$ が成り立つ．
※ $e^a = \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} a^m$ を定義とすることもある．この定義を採るのであれば主張は自明である．いずれにせよ自分の知っている定義を用いて示せば良い．

2) $\exp O_n = E_n$ が成り立つ．

3) $A, B \in M_n(\mathbb{C})$，$AB = BA$ とすると $\exp(A+B) = (\exp A)(\exp B) = (\exp B)(\exp A)$ が成り立つ．

4) $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ とすると，一般には $\exp(A+B)$, $(\exp A)(\exp B)$, $(\exp B)(\exp A)$ のどの二つも異なる．そのような A, B の例を一組挙げよ．
ヒント：$n = 2$ の時に既に存在する．n が一般の時には，$n = 2$ の場合の例を考え，うまくサイズを大きくすればすぐに見つかる．一方，$n = 1$ の時にはこのような例は存在しない．

5) $A \in M_n(\mathbb{C})$ とすると $\exp A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ であって，$(\exp A)^{-1} = \exp -A$ が成り立つ．

6) $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ とすると $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}(\exp A)P$ が成り立つ．

問 10.5. $t \in \mathbb{R}$ を実変数とする．$A \in M_n(\mathbb{C})$ について $f(t) = \exp tA$ と置く．t に関する微分は項別にして良い，即ち

$$\frac{df}{dt}(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m!}A^m t^m\right) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(m-1)!}A^m t^{m-1}$$

が成り立つことを認めた上で，

$$\frac{df}{dt}(t) = A \exp tA = (\exp tA)A$$

が成り立つことを示せ．

注 10.6****.** $t \in \mathbb{C}$ としても $\exp tA$ は定まる．$f(t) = \exp tA$ とすれば $f\colon \mathbb{C} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ であるが，これは $t \in \mathbb{C}$ に関して「複素解析的（正則）」な函数である．複素解析的な函数については恐らく二年生以降で扱う．

問 10.7. 以下の行列を求めよ．必要であれば $\exp, \sin, \cos$ 等の基本的な函数（初等函数）のテーラー展開を用いて良い．

1) $\exp\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 2) $\exp\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 3) $\exp\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$ 4) $\exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

5) $\exp\begin{pmatrix} 0 & t & 0 & \cdots & & 0 \\ & 0 & t & 0 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & t & 0 \\ & & & & 0 & t \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$ 6) $\exp\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ & a & 1 & 0 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a & 1 & 0 \\ & & & & a & 1 \\ & & & & & a \end{pmatrix} t$

6) は t がかかっていることに注意せよ．

問 10.8. $A \in M_n(\mathbb{R}),\ b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ とし，b は連続とする．ベクトル値函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$（変数は t とする）に関する微分方程式

$$\frac{df}{dt}(t) = Af(t) + b,\ f(0) = c\,(\in \mathbb{R}^n)$$

を考える．

1) $b = 0$ とする．
   a) $f(t) = (\exp tA)c$ とすると f は解であることを示せ．
   b) f を解とする．$g(t) = (\exp -tA)f(t)$ とすると，$\dfrac{dg}{dt}(t) = o\,(\in \mathbb{R}^n)$ が成り立つことを示せ．従って $g(t) = g(0)$ が成り立つ．
   c) 解は $(\exp tA)c$ のみであることを示せ．
2) b は一般の連続函数とする．
   a) f を解とする．$g(t) = (\exp -tA)f(t)$ とすると，
   $$\frac{dg}{dt}(t) = b(t),\ g(0) = f(0) = c$$
   が成り立つことを示せ．
   b) $h(t) = \displaystyle\int_0^t b(t)\,dt + c$ とすると，解は $(\exp tA)h(t)$ のみであることを示せ．ここで，ベクトル値函数の積分は成分ごとに行うことにより定める．

問 10.9. $A \in M_n(\mathbb{R})$ とし，$X\colon \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ は微分可能だとする（変数は t とする）．

1) $\dfrac{d}{dt}X(t) = AX(t)$ が成り立つとすると $X(t) = (\exp tA)X(0)$ が成り立つことを示せ．
2) $\dfrac{d}{dt}X(t) = X(t)A$ が成り立つとすると $X(t) = X(0)(\exp tA)$ が成り立つことを示せ．

ヒント：$(\exp -tA)X(t)$ や $X(t)(\exp -tA)$ を考えてみよ．

問 10.10. $X\colon \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ とし，$X(t) = (x_1(t)\ \cdots\ x_n(t))$ と列ベクトルを用いて表す（変数を t とする）．$f(t) = \det X(t)$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt}(t) = \det&\left(\frac{dx_1}{dt}(t)\ x_2(t)\ \cdots\ x_n(t)\right)\\ &+ \det\left(x_1(t)\ \frac{dx_2}{dt}(t)\ x_3(t)\ \cdots\ x_n(t)\right)\\ &+ \cdots\\ &+ \det\left(x_1(t)\ \cdots\ x_{n-1}(t)\ \frac{dx_n}{dt}(t)\right)\end{aligned}$$

が成り立つことを示せ．同様に，$X(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & \cdots & y_n(t) \end{pmatrix}$ と行ベクトルを用いて表すと

$$\frac{df}{dt}(t) = \det\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2'(t) \\ y_3(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} + \cdots + \det\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}(t) \\ y_n'(t) \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ．ここで $y_k'(t) = \dfrac{dy_k}{dt}(t)$ である．

ヒント：行列式を成分を用いて表す式を用いて素直に $\dfrac{df}{dt}(t)$ を計算し，それを右辺と比較せよ．

問 10.11 *．$X \in M_n(\mathbb{C})$ とすると $\det\exp X = e^{\operatorname{tr} X} = \exp(\operatorname{tr} X)$ が成り立つことを以下の二通りの方法で示せ（もう少し線型代数の講義が進んだ頃にならないと解けないかも知れない）．ここで $\operatorname{tr} X$ は X の対角成分の和である．

1) $f(t) = \det\exp(tX)$ と置く（$t \in \mathbb{R}$ を変数とする）．$\dfrac{df}{dt}(t)$ は問 10.10 のように計算できるが，例えば最初の式を用いる．$\exp tX = (x_1(t) \ \cdots \ x_n(t))$ とすれば $(\exp tX)X = \dfrac{d}{dt}(\exp tX) = (x_1'(t) \ \cdots \ x_n'(t))$ なので，

$$\left(\frac{dx_1}{dt}(t) \ x_2(t) \ \cdots \ x_n(t)\right) = \left(\sum_{l=1}^{n} x_l(t)x_{l1} \ x_2(t) \ \cdots \ x_n(t)\right)$$

が成り立つ．ここで x_{lk} は X の (l,k) 成分である．行列式の性質を用いて

$$\det\left(\frac{dx_1}{dt}(t) \ x_2(t) \ \cdots \ x_n(t)\right) = x_{11}(x_1(t) \ \cdots \ x_n(t))$$

が成り立つことを示す．すると，$\dfrac{d}{dt}f(t) = (\operatorname{tr} X)f(t)$ が得られるので，初期条件 $f(0) = 1$ の下でこれを解き，$t = 1$ とする．なお，二番目の式を用いて同様の議論を行うこともできる．

2) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を X の固有値とする（同じ固有値も重複度の分だけ並べる）．$P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を用いて $P^{-1}XP$ が「Jordan 標準形」であるようにして，$\det(\exp X) = (\exp\lambda_1)\cdots(\exp\lambda_n)$ が成り立つことを示す．

定義 10.12 (線型代数の講義などで定義されることが多いと思われるが，微積分においても重要である．必要に応じて自然に覚えていくものなので無理に覚える必要はない)．

$$M_n(\mathbb{R}) = \{n \text{ 次の実行列全体}\},$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) &= \{n \text{ 次の正則な実行列全体}\} = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det X \neq 0\}, \\
\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) &= \{X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det X = 1\} = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det X = 1\}, \\
\mathrm{O}_n &= \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X^t X X = X^t X = E_n\}, \\
\mathrm{SO}_n &= \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X^t X X = X^t X = E_n,\ \det X = 1\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) &= M_n(\mathbb{R}), \\
\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) &= \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} X = 0\}, \\
\mathfrak{o}_n &= \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid X + {}^t X = O_n\}, \\
\mathfrak{so}_n &= \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid X + {}^t X = O_n,\ \operatorname{tr} X = 0\}
\end{aligned}$$

と置く．

詳しいことは線型代数に譲る．なお，O_n, SO_n, $\mathfrak{o}_n$ や $\mathfrak{so}_n$ は物理的には剛体の運動（rigid motion）と関連が深い．

問 10.13. $(G, \mathfrak{g})$ を $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}))$，$(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}),\ \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}))$，$(\mathrm{O}_n,\ \mathfrak{o}_n)$，$(\mathrm{SO}_n,\ \mathfrak{so}_n)$ のいずれかとする．$X \in \mathfrak{g}$ ならば $\exp X \in G$ が成り立つことを示せ．必要なら問 10.11（の結果）を用いよ．

問 10.14. $\mathfrak{so}_n = \mathfrak{o}_n$ が成り立つことを示せ．

（以上）