２０１６年度数理科学基礎 II（理 I 6,7,9,10 組向け，足助担当）演習問題 ６　2016/5/20（金）
'16/5/25：問 6.1 1) を修正.

問 6.1. K の元から成る数列（点列）$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は漸化式

$$a_{n+3} + a_{n+2} - 4a_{n+1} - 4 = 0$$

を満たすとする．K^3 に値を取るベクトルの列（点列）$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $v_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$ により定める.

1) v_n が満たすべき漸化式を求め，行列とベクトルを用いて $v_{n+1} = Av_n + b$ の形に表せ.

2) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ と置く.

a) $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{16} \\ -\dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{4} & \dfrac{3}{16} \end{pmatrix}$ と置くと，$PQ = QP = E_3$ が成り立つことを確かめよ．従って $P \in \mathrm{GL}_3(K)$ であって，$Q = P^{-1}$ が成り立つ.

※ 具体的に逆行列を求めるのには**掃き出し法**と呼ばれる物を用いることが多い．これについては「線型代数学」で述べる.

b) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ.

※ このように，$A \in M_n(\mathbb{C})$ について $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を用いて $P^{-1}AP$ が対角行列であるようにすることを A の**対角化**と呼ぶ．P の見つけ方については「線型代数学」で（恐らく冬学期に）扱う.

3)* v_n や a_n の一般項を求めよ.

問 6.2****.** 微分方程式

$$\frac{d^2}{dT^2}\theta = -\sin\theta \tag{6.3}$$

を真面目に解いてみる．$\dfrac{d\theta}{dT}$ は T の函数であるが,

$$\frac{d\theta}{dT} = f(\theta) \tag{6.4}$$

と，ある函数 f を用いて，θ の函数として表すことができると仮定する．これはそれほど不自然な仮定ではない．というのは，θ は T により定まるが，十分短い時間の間であれば，θ から時

刻 T を定めることができると期待できるからである．従って（大丈夫な範囲で）$T=T(\theta)$ と表せば T の函数 $\dfrac{d\theta}{dT}$ は θ の函数と考えることができる．

1) (6.4) を T で微分することにより
$$\frac{d^2}{dT^2}\theta = \frac{df}{d\theta}\frac{d\theta}{dT}$$
が成り立つことを示せ．また，(6.3) と (6.4) を用いて
$$-\sin\theta = \frac{df}{d\theta}f$$
が成り立つことを示せ．

2)
$$\frac{1}{2}(f(\theta))^2 = \cos\theta + C,$$
C は積分定数，が成り立つことを示せ．

注 6.4 **(数学からはやや離れた注)．振り子が存在しているならば，現れる量は全て実数の筈なので $C \geq 1$ が成り立つとするのが自然であることに注意せよ．$-1 \leq C < 1$ の場合は物理的な存在は可能であるが，右辺が負になれば何らかの問題が生じる．$C < -1$ であれば，振り子は何かしら仮想的な存在となる（物理的に無意味かどうかは別問題である）．

さて，$2C$ を改めて C と置き直せば，
$$f(\theta) = \sqrt{C + 2\cos\theta}$$
が成り立つ．従って $\theta_0 = \theta(T_0)$ とすると
$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{\sqrt{C + 2\cos\varphi}} d\varphi = \int_{T_0}^{T} dS = T - T_0$$
が成り立つ（φ, S はそれぞれ θ, T に関する積分を考えるために一時的に設けた変数である）．左辺は**楕円積分**と呼ばれるものの一種で，一般には sin などのよく知られた函数（**初等函数**）で表すことができない[1]ことが知られている．
※ この問に関する脱線を最後に述べた．微分方程式を扱う際の初歩的な事柄なので一読を勧める．なお，実際にはもっと込み入った，高度なことが用いられることが多いが，いきなりその種の話を扱うのには無理がある．

問 6.5. 1) $V = \mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$, $W = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \,|\, v \text{ の第 3 成分は 0 に等しい} \right\}$ とする．このとき，W は V の部分線型空間であることを示せ．

[1]例えば三角函数が多項式で表せないことに似ている．なお，C や T, T_0 の値によっては初等函数で表せることもある．

2) $V = \mathbb{R}[x]$ とする（$\mathbb{R}[x]$ は x を変数とし，実数を係数とする多項式全体のなす集合（実際には線型空間，更に環）を表すのであった）．$n \in \mathbb{N}$ とし，

$$W_n = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f \text{ は高々 } n \text{ 次}\}$$

と置く．W_n は $\mathbb{R}[x]$ の部分線型空間であることを示せ．

3) $V = \mathbb{R}^2$ とする．$a \in \mathbb{R}^2$ を o（零ベクトル）でないとし，$W_b = \{v \in V \mid \langle a \mid v \rangle = b\}$ と置く．ただし $b \in \mathbb{R}$ とする．W_b が $V = \mathbb{R}^2$ の部分線型空間であることは $b = 0$ であることと同値であることを示せ．

問 6.6. $V = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid a_n \in K\}$ と置く．V は K の元から成る数列全体のなす集合である．

1) V は K-線型空間であることを示せ．
※ V が「線型空間の公理」を満たすことを示すしかない．面倒だが仕方がない．

2) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ とする．

$$\{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid a_n \in K,\ a_{n+m} + \alpha_1 a_{n+m-1} + \cdots + \alpha_n a_m = 0\}$$

は V の部分線型空間であることを示せ．

問 6.7. $V = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \mid f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \text{ は微分可能である}\}$ と置く．

1) V は $\mathbb{R}$-線型空間であることを示せ．ただし，

a) $f, g \in V$ について $f + g \in V$ は条件

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

b) $f \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$ について $\lambda f \in V$ は条件

$$(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$$

により定める．

2) $A \in M_n(\mathbb{R})$ とする．

$$\{f \in V \mid f' = Af\}$$

は V の部分線型空間であることを示せ．ここで $f = {}^t(f_1 \ \cdots \ f_n)$ とするとき $f' = {}^t(f_1' \ \cdots \ f_n')$ と定める．

※ ここから問 6.12 までは二年生の「常微分方程式」の内容になるので，とりあえず後回しにして良い．

行列の指数函数について

定義 6.8 (第 4 回の演習問題（演習問題２）も参照のこと). $A \in M_n(K)$ とする．

$$\begin{aligned}\exp A &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} A^m \\ &= \lim_{M \to +\infty} \sum_{m=0}^{M} \frac{1}{m!} A^m \\ &= E_n + A + \frac{1}{2} A^2 + \cdots\end{aligned}$$

と置いて，$\exp\colon M_n(K) \to \mathrm{GL}_n(K)$ を**行列の指数函数**あるいは**指数写像**と呼ぶ．ここで，$A \in M_n(K)$ について $A^0 = E_n$ と定める．なお，正確な定義は右辺の二番目の式であって，外の二つは略記である．

問 6.9. 次が成り立つことを示せ．種々の函数の原点におけるテーラー展開は認めて用いて良い．

1) $\exp O_n = E_n$.
2) $\exp \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.
3) $\exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$.
4) $\exp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

※ 行列は数とは異なり $A \neq O$ であっても，$A^m = O$ がある m について成り立つことがある．このような場合には $\exp A$ を定める級数は有限和（途中から現れる項が全て O であるような級数）になる．

定義 6.8 はいろいろ非自明なことを当たり前のように述べている．まず，そもそも exp を定める級数が収束していることを示さないといけない．これは頑張るとなんとかできる（「微分積分学」で必要なことは扱う．この種のことをきちんとしようとすると，「ϵ–δ 何ちゃら」が不可避になる）．次は $\exp A \in \mathrm{GL}_n(K)$ が成り立つ，つまり $\exp A$ が正則であることを示す必要がある．これは次のようにして分かる．

問 6.10. exp に関する級数は，多項式のように計算して構わないことを認めて，以下を示せ．収束は気にせず，形式的に計算すれば良い．

1) $A, B \in M_n(K)$ が $AB = BA$ を満たすならば，

$$\exp(A + B) = (\exp A)(\exp B) = (\exp B)(\exp A)$$

が成り立つ．

※ $AB = BA$ が成り立たない場合には次の問 6.11 を参照のこと．

2) $A \in M_n(K)$ とすると，$(\exp A)(\exp(-A)) = (\exp(-A))(\exp A) = E_n$ が成り立つ．

3) $A \in M_n(K)$ とすると，$\exp A \in \mathrm{GL}_n(K)$ であって，$(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$ が成り立つ．

※ 実際には $\exp(-A)$ が $\exp A$ の逆行列であることを示すことができるので，その結果として $\exp A \in \mathrm{GL}_n(K)$ が導かれる．つまり，主張と証明では順番が逆になっている．このようなことは良くあるので，証明においては主張の順番通りに示すことにあまりこだわらない方が良い．

問 6.11. $A, B \in M_n(K)$ が $AB = BA$ を満たさないと，一般には $\exp(A+B)$，$(\exp A)(\exp B)$，$(\exp B)(\exp A)$ のうちのどの二つも一致しない．このことを $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ について確かめよ．

問 6.12. $A \in M_n(K)$ とする．$x \in \mathbb{R}$ を変数とし $f(x) = \exp(xA)$ とする．

1)
$$\frac{d}{dx} f(x) = A \exp(xA) = (\exp(xA))A$$
が成り立つことを示せ．収束は気にせず，形式的な計算をすれば良い．

2) $v \in K^n$ とし，$g(x) = \exp(xA)v$ と定める．すると g は微分方程式
$$\frac{dg}{dx} = Ag$$
の解であることを示せ．

注 6.13 ****.** 微分方程式 (6.3) について，そのまま実際に解く（**厳密解**を求める，などと言う）ことと，方程式を近似的な物に取り替えて解くことを考えた．一方，方程式を近似するのではなく，近似的な解を求めることも考えることができる．つまり，θ について
$$\frac{d^2}{dT^2}\theta + \sin\theta$$
が 0 には等しくないかも知れないが，何らかの意味で 0（定数函数 0）に近いことを期待してみる．何をもって，ある函数が 0 に近いとするかはいろいろな立場が有り得る．例えば
$$\sup_{T \in \mathbb{R}} |\theta(T) - 0|$$
が十分小さければ，θ のグラフは T 軸と大体同じなので，θ は 0 に近いと言える．しかし，これだと例えば $\theta(T) = \dfrac{1}{n} \sin n^2 T$（但し $n \in \mathbb{N}$ とし，十分大きいとする）のような函数は 0 に近いが，一方，$\dfrac{d}{dT}\theta(0) = n$ となり，定数函数 0 にはあまり近い感じがしない．これでは困る場合には例えば
$$\sup_{T \in \mathbb{R}} |\theta(T) - 0| + \sup_{T \in \mathbb{R}} \left| \frac{d}{dt}\theta(T) - 0 \right|$$

を考えると，微分も込めて 0 に近い函数を考えることになる．外にもいろいろな考え方がある．ここではこのことには深入りせず，次のように考える．方程式 (6.3) の解 θ が T が 0 に近いときには

$$\theta(T)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nT^n \tag{6.14}$$

と表されるとする．0 の近くで考えているから，n が大きければ $|a_nT^n|$ は小さいと考えられるので，n が小さい順に a_n を定めることを考える．さて,（本当はこのような操作はしてよい場合と駄目な場合があるが）素朴に (6.14) の右辺を項別に微分して良いと仮定する．すると，

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dT^2}\theta(T)&=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nT^{n-2}\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}T^n\end{aligned}$$

を得る．一方，$\sin x=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ が成り立つ．そこで，$\theta(0)=0$ と仮定すれば，T が 0 に近ければ

$$\sin\theta(T)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\theta(T)^{2n+1} \tag{6.15}$$

が成り立つと期待できる．(6.15) の右辺に (6.14) を代入して整理して良いかどうかは場合により，本当は確かめないといけないことであるが，ここではこれもできると素朴に仮定する．代入した結果を一般的に表示することは困難であるが，$a_0=\theta(0)=0$ に注意して 5 次の項まで計算すると

$$\begin{aligned}\sin\theta(T)=a_1T+a_2T^2&+\left(a_3-\frac{1}{6}a_1^3\right)T^3+\left(a_4-\frac{1}{2}a_1^2a_2\right)T^4\\&+\left(a_5-\frac{1}{2}a_1^2a_3-\frac{1}{2}a_1a_2^2+\frac{1}{30}a_1^5\right)T^5+\cdots\end{aligned}$$

を得る．よって

$$\begin{aligned}a_0&=0,\\2a_2&=-a_0=0,\\6a_3&=-a_1,\\12a_4&=-a_2=0,\\20a_5&=-a_3+\frac{1}{6}a_1^3=\frac{1}{6}a_1^3+\frac{1}{6}a_1,\\30a_6&=-a_4+\frac{1}{2}a_1^2a_2=0,\end{aligned}$$

$$42a_7 = -a_5 + \frac{1}{2}a_1^2 a_3 + \frac{1}{2}a_1 a_2^2 - \frac{1}{30}a_1^5 = -\frac{1}{30}a_1^5 - \frac{1}{45}a_1^3 - \frac{1}{120}a_1$$

が成り立つ．a_1 については条件は無いが，これは元の方程式 (6.3) において，$\theta(0)$ と $\dfrac{d}{dT}\theta(0)$ を自由に指定できることに対応する．今は $\theta(0) = 0$ と指定しているから a_0 は 0 と定まるが，$a_1 = \dfrac{d}{dT}\theta(0)$ には条件は付かない．ここでは 5 次で近似を打ち切ったが，必要に応じて高い次数まで計算すれば，より良い近似解が得られる．ところで，a_1 も 0 に近いと仮定する．すると，近似的には

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{1}{6}a_1 = -\frac{1}{3!}a_1, \\ a_5 &= \frac{1}{120}a_1 = \frac{1}{5!}a_1, \\ a_7 &= -\frac{1}{7!}a_1 \end{aligned}$$

が成り立つ．これは (6.3) の近似的な方程式

$$\frac{d^2}{dT^2}\theta = -\theta$$

の，条件 $\theta(0) = 0$, $\dfrac{d}{dT}\theta(0) = a_1$ の下での解（厳密解）$\theta(T) = a_1 \sin T$ の $T = 0$ を中心とするテーラー展開の係数と一致する．従って，今の場合には方程式を近似しても，解を近似しても，一定の条件（$\theta(0) = 0$ であるとか，$\dfrac{d}{dT}\theta(0)$ が 0 に近いであるとか，さらには様々な都合の良い計算をして良い，という条件）の下では同じ近似解が得られる．

一般に，微分方程式の厳密解を求めることは不可能なことが多い．また，たとえ実際に厳密解が求まっても，それを用いるためには何らかの数値計算をせざるを得ない場合が少なくない（どこまでも理屈で突き進む場合ももちろんある）．その際，どのような計算をすれば誤差が少ないか，であるとか，あるいは効率が良いか，といった問題は重要である．これらは多くの場合方程式の形をある程度決めた上で，それら専用の方法を用いるが，ここではまず基本的な考え方について述べた．もう少し詳しいことは「常微分方程式」で，更に詳しいことは後期課程で扱う．

（以上）