２０１６年度線型代数学（理 I 6,7,9,10 組向け，足助担当）　演習問題 １１ 2016/10/28（金）

問 11.1. 講義の定義 3.2.18 の 1) において，条件「f の $\mathscr{V}$ に関する表現行列が対角行列である」を条件「f の $\mathscr{V}$ に関する表現行列が $\mathbb{C}$ 上対角化可能である」に置き換えても同値であることを示せ．また，2) の a) についても $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$ に置き換えれば同様であることを示せ．

問 11.2 (以前出題したかも知れない). 　1) $A \in M_n(K)$, $A \neq O_n$ とする．このとき，適当な $r \geq 1$ が存在して，条件

i) $E_n, A, \ldots, A^{r-1}$ は線型独立である．

ii) $E_n, A, \ldots, A^r$ は線型従属である．

が成り立つことを示せ.

2) 任意の $A \in M_n(K)$ について $f \in K[t]$ が存在して $f(A) = O_n$ が成り立つことを 1) を用いて（ケーリー・ハミルトンの定理を用いずに）示せ.

※ ケーリー・ハミルトンの定理の一つの帰結に $I_A = \{f \in K[x] \mid f(A) = O_n\}$ とすると $I_A \neq \{0\}$ が成り立つ，ということが挙げられるが，これを示すだけならばケーリー・ハミルトンの定理は不要であることが分かる．この観点からは，ケーリー・ハミルトンの定理の「御利益」は I_A の元の一つが具体的に分かること，より詳しく，A の成分を用いて記述できる，ということになる．

問 11.3. $A \in M_n(K)$ とし，$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を A の固有値全体とする（重複度が 2 以上の場合にはその数だけ同じものを並べる）.

1) $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ が成り立つことを示せ.

2) $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ が成り立つことを示せ.

3) $c_k(A) \in K$ を条件

$$\det(tE_n - A) = t^n + c_1(A)t^{n-1} + \cdots + c_n(A)$$

により定める（左辺は A の固有多項式である）．$c_1(A), \ldots, c_n(A)$ を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を用いて表せ（1), 2) は特別な場合である）.

問 11.4. $A \in M_n(K)$ とし，A の相異なる固有値全体を $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$，$\lambda_i$ の重複度を α_i とする（$1 \leq i \leq r$）.

1) $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_r^k$ のうち，重複を省いたものを $\mu(k)_1, \ldots, \mu(k)_s$ とする．また，重複を省く際に重複度を足し上げて得られる数を $\beta(k)_1, \ldots, \beta(k)_s$ とする．例えば $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 =$

$2, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 4$ ならば，$\mu(2)_1 = 1, \mu(2)_2 = 4, \beta(2)_1 = 3, \beta(2)_2 = 4,\ \mu(3)_1 = 1, \mu(3)_2 = -1, \mu(2)_2 = 8, \beta(3)_1 = 1, \beta(3)_2 = 2, \beta(3)_3 = 4$ である．この時，A^k の相異なる固有値全体は $\mu(k)_1, \dots, \mu(k)_s$ であって，$\mu(k)_i$ の重複度は $\beta(k)_i$ であることを示せ．

2) $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ ならば $k \leq 0$ についても 1) と同様のことが成り立つことを示せ．但し，任意の $\lambda \in K,\ A \in M_n(K)$ について $\lambda^0 = 1,\ A^0 = E_n$ と定める．

問 11.3 や 11.4 を用いると $\det A$ が $\mathrm{tr}\, A, \mathrm{tr}\, A^2, \dots, \mathrm{tr}\, A^n$ で表されることを示すことができるが，これらの外にも幾つか準備が要るのでここでは割愛する．

問 11.5. 直交行列はユニタリ行列であることを示せ．

問 11.6. 1) $A \in \mathrm{O}_n$ とすると，$\det A = 1$ あるいは $\det A = -1$ のいずれかが成り立つことを示せ．また，それぞれの場合について，例を一つずつ挙げよ．

2) $A \in \mathrm{U}_n$ とすると，$|\det A| = 1$ が成り立つことを示せ．また，$\alpha \in \mathbb{C},\ |\alpha| = 1$ について，$\det A = \alpha$ が成り立つような例を一つ挙げよ．

問 11.7. $\mathrm{O}_n \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{U}_n \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ が成り立つことを示せ．また，$A \in \mathrm{O}_n$ について $A^{-1} = {}^tA$ が，$A \in \mathrm{U}_n$ について $A^{-1} = A^*$ がそれぞれ成り立つことを示せ．

問 11.8. $W \subset V$ を部分線型空間とし，$\pi \colon V \to W$ を正射影とする．このとき，$\pi \circ \pi = \pi$ が成り立つことを示せ．

問 11.9. $v_1, \dots, v_r$ はいずれも o でなく，互いに直交するとする．このとき，$v_1, \dots, v_r$ は線型独立であることを示せ．

問 11.10. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in K^3$ とする．

1) $\{v_1, v_2, v_3\}$ は K^3 の基底であることを示せ．

2) K^3 の正規直交基底 $\{u_1, u_2, u_3\}$ であって，$\langle u_1 \rangle = \langle v_1 \rangle$，$\langle u_1, u_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$ が成り立つ物を一組求めよ．また，$(v_1\ v_2\ v_3) = (u_1\ u_2\ u_3)R$ が成り立つように $R \in M_3(K)$ を定めよ．

問 11.11. 1) $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ とすると，U_n の元 Q と n 次の上三角行列 R が存在して $A = QR$ が成り立つことを示せ．また，R の対角成分は全て正の実数であるようにできて，この条件の下で Q, R は一意的であることを示せ．

2) $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ とすると，O_n の元 Q と n 次の上三角行列 R が存在して $A = QR$ が成り立つことを示せ．また，R の対角成分は全て正の実数であるようにできて，この条件の下で Q, R は一意的であることを示せ．

ヒント：$A = QR$ が成り立つならば，R は正則である．従って $A = QR = Q'R'$ が成り立つならば，$Q^{-1}Q' = RR'^{-1}$ が成り立つ．左辺と右辺はそれぞれどのような行列なのか，考えてみよ．

問 11.12. $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$ と置く．$\mathbb{R}^3$ に標準的なユークリッド計量を入れ，V にはそれから自然に定まる計量を入れる．V の正規直交基底と，それの拡大となっているような $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底を一組ずつ求めよ．

問 11.13. $V = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f = 0$ あるいは $\deg f \leq n\}$ とする．$f, g \in V$ について $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ と表わして

$$\langle f \mid g \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$$

と定める．

1) $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ は V のユークリッド計量であることを示せ．
2) $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ からグラム–シュミットの方法により正規直交基底を構成せよ．

問 11.14*. $f, g \in \mathbb{R}[x]$ について，$f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $g = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ と表わして

$$\langle f \mid g \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + \cdots + a_{\min\{n,m\}}b_{\min\{n,m\}}$$

と置く．$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}[x]$ のユークリッド計量であることを示せ．

問 11.15.

1) $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．A の固有値の重複度が全て 1 である[1]ならば A は対角化可能であることを示せ．
2) $A \in M_n(\mathbb{R})$ とする．A の $\mathbb{C}$ の範囲での固有値が全て実数であるとし，また，重複度は 1 であるとする．このとき，A は $\mathbb{R}$ 上対角化可能であることを示せ．

問 11.16. $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ について $\langle A \mid B \rangle = \operatorname{tr} A^*B$ と置く．$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ は $M_n(\mathbb{C})$ のエルミート計量であることを示せ．また，$M_n(\mathbb{R})$ についても同様にユークリッド計量が定まることを示せ．

問 11.17. $M_n(K)$ には問 11.16 のように計量を入れる．

1) $A \in M_n(K)$ とする．$\forall \epsilon > 0, \exists B \in \mathrm{GL}_n(K)$, $\|A - B\| < \epsilon$ が成り立つことを示せ．
   ヒント：例えば $P, Q \in \mathrm{GL}_n(K)$ を用いて $PAQ = E_r \oplus O_{n-r}$, $r = \operatorname{rank} A$ として話を進めることができる．あるいは $P^{-1}AP$ が上三角行列であるとしても良い（外にも方法はある）．

[1] 重複していない，とも言う．以下同様．

2) $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ とする．$\exists \delta > 0,\ \forall B \in M_n(K),\ \|A - B\| < \delta,\ B \in \mathrm{GL}_n(K)$ が成り立つことを示せ.

ヒント：行列式に着目すると良い.

3) $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．

$$\forall \epsilon > 0, \exists B \in M_n(\mathbb{C}),\ B \text{ の全ての固有値の重複度は } 1 \text{ であって，かつ } \|A - B\| < \epsilon \text{ が成り立つ}$$

が成り立つことを示せ.

※ このとき，B は対角化可能である.

ヒント：三角化を考えるのが恐らく一番簡単である.

4) $A \in M_n(\mathbb{R})$ とし，固有値は（複素数の範囲で考えても）全て実数であるとする．このとき，

$$\forall \epsilon > 0, \exists B \in M_n(\mathbb{R}),\ B \text{ の全ての固有値は実数であり，また重複度は } 1 \text{ であって，更に } \|A - B\| < \epsilon \text{ が成り立つ}$$

が成り立つことを示せ.

※ このとき，B は $\mathbb{R}$ 上対角化可能である.

5) $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．

a) A の固有値の重複度が全て 1 だとする（従って A は対角化可能である）．ある $\delta > 0$ が存在して，$B \in M_n(\mathbb{C})$ が $\|A - B\| < \delta$ をみたせば B の固有値の重複度も全て 1 であることを示せ．特に B は対角化可能である.

b) A のある固有値の重複度が 2 以上だとする．このとき，任意の $\epsilon > 0$ について，ある $B \in M_n(\mathbb{C})$ が存在して $\|A - B\| < \epsilon$ かつ B は対角化不可能であることを示せ.
ヒント：A が対角化不可能なら $B = A$ とすればよいので，A が対角化可能な場合を考えれば良い．ところで，$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ は対角化不可能である.

（以上）