

問 8.1. $A \in M_n(K)$, $P \in GL_n(K)$ とすると $\widetilde{P^{-1}AP} = P^{-1}\widetilde{A}P$ が成り立つことを以下のそれぞれの方針に従って示せ.

- 1) まず P が基本行列の場合に示し, 一般には P は基本行列の積として表せることを用いて, 帰納的に命題を示す.
- 2) 行列式や余因子行列の成分に関する連続性を用いて A が正則な場合に帰着して示す.

問 8.2. A を以下のように定めるとき, $\det A$ を求めよ.

1) $A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$ これについて興味があれば四元数体について調べてみよ.

2) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ により定める. このとき, $f = (f_1, f_2)$ と成分を用いて表し, $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{pmatrix}$ と置く.

3) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $f(r, \theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$ により定める. このとき, $f = (f_1, f_2, f_3)$ と成分を用いて表し, $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_3}{\partial r} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta} & \frac{\partial f_3}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$ と置く.

4) $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を

$$f(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = \begin{pmatrix} r \cos \theta_1 \\ r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ \vdots \\ r \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} \\ r \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-1} \end{pmatrix}$$

により定める. このとき, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ と成分を用いて表し, $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_{n-1}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial r} & \frac{\partial f_n}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial \theta_{n-1}} \end{pmatrix}$ と置く.

$n = 2$ とすると 2) の場合である. $n = 3$ とすると本質的には 3) の場合であるが, やや異なる. 伝統的にこのようにすることが多いので, ここでもそれに従った.

2), 3), 4) のように, 全微分可能な n 変数の \mathbb{R}^n 値関数から行列式を用いて得られる函数をヤコビアンと呼ぶ. また, 現れる行列は全微分に対応している. 詳しいことは微分積分学で扱う.

本当にうまく行くことは証明しないといけないが、ここではそれはサボることにして話を進める¹。以下で「定義」としているいくつかのことは本来は正しい定義に基づいて示される性質である。

以下では V を K -線型空間とする。

定義 8.3*. $v, w \in V$ について、 $v \wedge w$ は次の性質を持つものであると定める。

- 1) $v \wedge w$ は双線型である。即ち、 w を固定すれば v に関して線型であるし、 v を固定すれば w に関して線型である。
- 2) $v \wedge v = 0$ が成り立つ。

問 8.4. $w \wedge v = -v \wedge w$ が成り立つことを示せ。

定義 8.5*. $v_1, v_2, v_3 \in V$ について

$$v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 = (v_1 \wedge v_2) \wedge v_3 = v_1 \wedge (v_2 \wedge v_3)$$

と定める。三個以上の V の元 v_1, \dots, v_n についても同様に $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ を定める。

定義 8.6*. $\{v_1, \dots, v_r\}$ を V の基底とする。この時、

$$\wedge^r V = \langle v_1 \wedge \dots \wedge v_r \mid v_1, \dots, v_r \in V \rangle$$

と定める。単に $v_1 \wedge \dots \wedge v_r$ 全体を考えているのではなく、これらにより生成される線型空間を考えていることに注意せよ。問 8.9 も参照のこと。

定理 8.7*. V の基底の取り方によらず、 $\{v_{k_1} \wedge \dots \wedge v_{k_r} \mid 1 \leq k_1 < \dots < k_r \leq n\}$ は $\wedge^r V$ の基底である。

問 8.8. $\dim V = n$ とすると $\dim \wedge^r V = \binom{n}{r} = {}_n C_r$ が成り立つことを示せ（数学では ${}_n C_r$ を $\binom{n}{r}$ で表わすことが多い）。特に $\dim \wedge^n V = 1$ が成り立つことを示せ。

問 8.9. $V = \mathbb{R}^4$ とする。

- 1) $a \in \wedge^2 V$ が $v, w \in V$ を用いて $a = v \wedge w$ と表わされるならば $a \wedge a = 0$ が成り立つことを示せ。
- 2) $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ を V の標準的な基底とする。 $e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$ は $v \wedge w$, $v, w \in V$ の形に表せないことを示せ。

問 8.10. $A \in M_n(K)$ とし、 $\{e_1, \dots, e_n\}$ を K^n の標準的な基底とする。 $\delta(A)$ を条件

$$\delta(A)e_1 \wedge \dots \wedge e_n = (Ae_1) \wedge \dots \wedge (Ae_n)$$

により定めると、 $\delta(A) = \det A$ が成り立つことを示せ。

(以上)

¹テンソル代数、外積代数 (Grassmann 代数) について調べると良い。