

問 4.1. V を K -線型空間とする. V の K -部分線型空間 W, U, X について $V = W \oplus U = W \oplus X$ が成り立つならば $U \cong X$ が成り立つことを示せ.

ヒント: U から X への K -線型同型写像を一つ作れば良い. $u \in U$ とする. $u \in V$ であるから, $u = w + x$, $w \in W$, $x \in X$ と一意的に表すことが出来る. そこで $\varphi(u) = x$ と置けば φ は U から X への写像である. φ について調べてみよう.

問 4.2. V, W, U を K -線型空間とする.

- 1) $f: V \rightarrow W$, $g: W \rightarrow U$ をそれぞれ K -線型同型写像とする. このとき, $g \circ f$ は K -線型同型写像であることを示せ.
- 2) $V \cong W$, $W \cong U$ が成り立つとする. このとき $V \cong U$ が成り立つことを示せ.

定義 4.3 (定義 1.4.1 の補足). V を K -線型空間とする. $v \in V$ について,

$$Kv = \langle v \rangle = \{w \in V \mid \exists \lambda \in K, w = \lambda v\}$$

と定める.

問 4.4. V を K -線型空間とし, $v_1, \dots, v_r \in V$ とする. $\langle v_1, \dots, v_r \rangle = Kv_1 + \dots + Kv_n$ が成り立つことを示せ.

問 4.5 (定理 1.5.7 の証明の補足). V を線型空間とし(ただし $V \neq \{0\}$ とする), $\mathcal{V}, \mathcal{W} \subset V$ を V の基底とする. また, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ とする. $\mathcal{W} = \emptyset$ ならば, V は \mathcal{W} の元たち(実際にはない)で生成されるのだから $V = \langle \mathcal{W} \rangle = \{0\}$ が成り立ち, 仮定に反する. よって $\mathcal{W} \neq \emptyset$ である(形式的な議論なので, よくわからなければ取り敢えず放置して構わない).

- 1) $w_1 \in \mathcal{W}$ とする. 必要であれば v_i 達の順序を入れ替えると $\{w_1, v_2, \dots, v_n\}$ は V の基底であることを示せ(これは講義で示した).
- 2) 帰納的に, 必要であれば v_2, \dots, v_n の順序を入れ替えて, $\{w_1, w_2, \dots, w_{k-1}, v_k, \dots, v_n\}$ が V の基底であるとする(ただし $k \leq n$ とする). このとき, $w_k \in V$ であるから, ある $\mu_1, \dots, \mu_n \in K$ が存在して

$$w_k = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_{k-1} w_{k-1} + \mu_k v_k + \dots + \mu_n v_n$$

が成り立つ. このとき, μ_k, \dots, μ_n のいずれかは 0 でないことを示せ.

- 3) 必要なら v_k, \dots, v_n の順序を入れ替えて $i = k$ として良い. このとき, $\{w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ は V の基底であることを示せ.

ヒント: 1) と同様に議論すればよい.

- 4) v_i を w_i で置き換える操作を繰り返す . もし $\mathscr{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$, $m < n$ とすると \mathscr{W} も $\{w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ も V の基底である . すると w_1, \dots, w_m は V を生成するので , $v_{m+1} = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_m w_m$ と表すことができる . これは w_1, \dots, w_m, v_{m+1} が線型独立であることに反することを確かめよ .
- 5) 従って \mathscr{W} は n 個以上の元からなる . また , $\{w_1, \dots, w_n\}$ は V の基底である . ここで $w \in \mathscr{W} \setminus \{w_1, \dots, w_n\}$ とすると , やはり $w = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_n w_n$ と表すことができる . これは \mathscr{W} が基底である , 特に w_1, \dots, w_n, w が線型独立であることに反することを確かめよ .

よって , $\mathscr{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ が成り立ち , n 個の V の元からなる .

\mathscr{W} の元の個数は最終的には n 個になったが , 何個であるか , 特に有限個であるかは仮定していない .

問 4.6. $V = \{a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid a_n \in K\}$ とする . また , $i \in \mathbb{N}$ について , $V_i = \{(a_0, a_1, \dots, a_i) \mid a_0, \dots, a_i \in K\} = M_{1, i+1}(K)$ と置く .

- 1) $\pi_i: V \rightarrow V_i$ を , $a = (a_n) \in V$ について $\pi_i(a) = (a_0, \dots, a_i)$ により定めると , 全射な線型写像であることを示せ .
- 2) $\iota_i: V_i \rightarrow V$ を , $b = (b_0, \dots, b_i) \in V_i$ について

$$(\iota_i(b))_n = \begin{cases} b_n, & n \leq i, \\ 0, & n > i \end{cases}$$

により定める ($\iota_i(b)$ という名前の数列を定める) と , 単射な線型写像であることを示せ .

- 3) $\pi_i \circ \iota_i = \text{id}_{V_i}$ が成り立つことを示せ . また , $\iota_i \circ \pi_i: V \rightarrow V$ がどのような写像であるか簡潔に述べよ .
- 4) V が有限次元であると仮定する . $\dim V = r$ とし , 線型同型写像 $f: K^r \rightarrow V$ を一つ選ぶ . $i > r$ とすると , $\pi_i \circ f: K^r \rightarrow V_i$ は全射ではあり得ないことを示せ . また , $f^{-1} \circ \iota_i: V_i \rightarrow K^r$ は単射ではあり得ないことを示せ .
- 5) V は有限次元ではないことを示せ .

問 4.7. $A \in M_{m,n}(K)$ とし , $v \in K^n$ について $f(v) = Av$ と定める . K^n, K^m の順序付き基底 $(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ を以下のように定めるとき , f の $(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ に関する表現行列を求めよ .

- 1) \mathscr{V}, \mathscr{W} をそれぞれ標準的な順序付き基底とする .
- 2) $n > 1$ とし , \mathscr{W} を K^m の標準的な順序付き基底とする . また , e_1, \dots, e_n を K^n の基本ベクトルとし , $\mathscr{V} = (e_2, e_1, e_3, \dots, e_n)$ とする .
- 3) $m > 1$ とし , \mathscr{V} を K^n の標準的な順序付き基底とする . また , e'_1, \dots, e'_m を K^m の基本ベクトルとし , $\mathscr{W} = (e'_2, e'_1, e'_3, \dots, e'_m)$ とする .
- 4) $\mathscr{V} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathscr{W} = (w_1, \dots, w_m)$ とする .

ヒント： $P = (v_1 \cdots v_n), Q = (w_1 \cdots w_m)$ と置いて，標準的な順序付き基底から \mathcal{V} や \mathcal{W} への変換行列を P, Q を用いて表してみよ．

問 4.8. $K_n[x] = \{f \in K[x] \mid f = 0 \text{ であるか, } \deg f \leq n \text{ が成り立つ}\}$ と置く（この記号は一定程度用いられるが，方言のようなものであまり一般的ではない）．また， $\varphi: K_n[x] \rightarrow K_n[x]$ を $\varphi(f) = \frac{df}{dx}$ により定める．

- 1) φ は確かに定まって，線型であることを確かめよ．即ち， $\varphi(f) \in K_n[x]$ が成り立つことや， φ が線型であることを確かめよ．
- 2) $\mathcal{V} = (1, x, x^2, \dots, x^n)$ と置く． \mathcal{V} は $K_n[x]$ の基底であることを示せ．
- 3) $\mathcal{W} = \mathcal{V}$ と置く． φ の $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ に関する表現行列を求めよ．

問 4.9. $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0 \right\}$ と置く．

- 1) V は K^n の部分線型空間であることを示せ．
- 2) e_1, \dots, e_n を K^n の基本ベクトルとする． $v_1 = e_1 - e_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = e_2 - e_n, \dots, v_{n-1} = e_{n-1} - e_n$ と置くと， $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ は V の基底であることを示せ．
- 3) \mathcal{V} とは異なる V の基底を幾つか挙げよ．

4) $f: K^n \rightarrow K^n$ を $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \end{pmatrix}$ により定める．このとき， $f(V) \subset V$ が成り立つ

ことを示せ．また， f の V への制限，即ち， f に V の元しか代入しないことにより定まる V から V への写像を g とするとき， g の \mathcal{V} に関する表現行列を求めよ． g は $f|_V$ や $f|_V$ で表すのが一般的である．

ヒント：以前問うたように， f の（標準的な順序付き基底に関する）表現行列は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

であるが， g の表現行列はこれではあり得ない．実際， g は V から V への写像であるが， $\dim V = n - 1$ なのだから，横の成分は $(n - 1)$ 個でないとおかしいし，縦の成分も $(n - 1)$ 個でないとおかしい．

¹記号 \subset, \subsetneq と \subseteq, \subset に注意．後者は昔はよく用いられたが，最近では廃れている．古い文献や「変わった記法」を用いる人の文章に備える意味で知っておくことは良いことであるが，自分で何かを書くときには用いないほうが良い（むしろ，用いることは避けるべきである）．

5) $\iota: V \rightarrow K^n$ を $v \in V$ について $\iota(v) = v$ により定める. すなわち, $v \in V$ であるが, そもそも $v \in K^n$ だったのでそのことを思い出す写像を ι で表す (このような写像を包含写像と呼ぶ).

a) K^n の標準的な順序付き基底を $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ とするとき, ι の $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ に関する表現行列を求めよ.

b) $\iota \circ g = f \circ \iota$ が成り立つことを示せ. また, 4) で求めた表現行列を B , a) で求めた表現行列を P とするとき, $PB = AP$ が成り立つことを,

α) 実際に計算することにより,

β) $\iota \circ g = f \circ \iota$ であることを用いて, 行列の積を実際に計算することをせずにそれぞれ示せ.

問 4.10. 以下のように V, W_1, W_2 を定めるとき,

$W_1 \cap W_2$ の基底 $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_r\}$,

$W_1 + W_2$ の基底 $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_s\}$ で, \mathcal{W} の拡大 (延長) であるもの,

V の基底 $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ で, \mathcal{U} の拡大 (延長) であるもの

をそれぞれ一つずつ求めよ.

1) $V = K^4$ とし,

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in K^4 \mid x_3 = x_4 = 0 \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in K^4 \mid x_1 = x_2 = x_3 = 0 \right\}$$

とする.

2) $a \in K^n$ とする. また, $V = K^n$, $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \right\}$, $W_2 =$

$Ka (= \langle a \rangle)$ とする.

3) $V = \{(a_n) \mid a_n \in K, a_{n+3} + 5a_{n+2} + 7a_{n+1} + 3a_n = 0\}$ を数列のなす線型空間とし,

$$W_1 = \{(a_n) \in V \mid a_{n+1} + 3a_n = 0\},$$

$$W_2 = \{(a_n) \in V \mid a_{n+1} + a_n = 0\}$$

とする.

ヒント: $x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = (x+1)^2(x+3)$ が成り立つ.

(以上)