２０１５年度数理科学基礎Ｉ（理Ｉ 32〜35 組向け，足助担当）　演習問題 4　2015/5/25（月）

この演習は概ね第 9 回の講義に対応する．

I を区間とし，$g\colon I \to \mathbb{R}$ は微分可能であるとする．すると，Dg について中間値の定理が成り立つ．

命題 (導函数に関する中間値の定理)**.** $a, b \in I$, $a < b$ とする．$Dg(a) < Dg(b)$ とし $r \in (Dg(a), Dg(b))$ とすると，$\exists c \in (a, b)$, $r = Dg(c)$ が成り立つ．$Dg(a) > Dg(b)$ なら $r \in (Dg(b), Dg(a))$ とすれば同様のことが成り立つ．

注. 命題において Dg が連続であるかどうかは問わない．一般の連続でない函数については中間値の定理は必ずしも成り立たない．導函数はたとえ連続でなくとも特別な種類の函数であることをこの命題は意味する．

問 4.1. 上の命題（導函数に関する中間値の定理）を示すことを目標とする．ここでは $Dg(a) < Dg(b)$ とする．

1) $G(x) = g(x) - rx$ と置くと，G は $[a, b]$ 上で最小値を取ることを示せ．
2) そこで G の最小点（の一つ）を c とする．$c \in (a, b)$ が成り立つことを示せ．
3) c は G の局所的な最小点であることを示せ．
4) $Dg(c) = r$ が成り立つことを示せ．また，命題を示せ．

問 4.2. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に関する常微分方程式

$$(Df)^2 = 1$$

の解は $f(x) = x + c$, $c \in \mathbb{R}$ あるいは $f(x) = -x + c'$, $c' \in \mathbb{R}$ であることを示せ．

問 4.3. $n \in \mathbb{Z}$ とし，実数値函数 f に関する常微分方程式

$$xDf(x) = nf(x) \tag{4.3–1}$$

について考える．

1) とにかく解の見当をつけないことには仕方が無いので，思い切って大胆に考える．f は 0 を取らない（$f(x) = 0$ なる x は存在しない）し，x も 0 にはならないとして，(4.3–1) を
$$\frac{Df}{f}(x) = \frac{n}{x}$$
と書き換える．定義域については取り敢えず気にしないことにして，漠然と f は実数値函数であると考えると $f(x) = \pm e^C x^n$, $C \in \mathbb{R}$ が得られることを確かめよ．
2) $f(x) = Cx^n$, $C \in \mathbb{R}$ とすると，f は (4.3–1) の解であることを確かめよ．
3) $x \neq 0$ として（f の定義域は 0 を含まないとして）$g(x) = \dfrac{f(x)}{x^n}$ と置く．g は $\mathbb{R}_{>0}$，$\mathbb{R}_{<0}$ 上でそれぞれ定数であることを示せ．

4) f の定義域が $\mathbb{R}_{>0}$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}$ のそれぞれの場合に，(4.3–1) の解を求めよ．
注意：n により場合分けの必要が生じることがある．

問 4.4. f を一変数の実数値函数とする．ここでは定義域については気にしないことにして，3 階の常微分方程式

$$\frac{D^3 f}{Df} - \frac{3}{2}\left(\frac{D^2 f}{Df}\right)^2 = 0 \tag{4.4–1}$$

について考える．

1) $g = \dfrac{D^2 f}{Df}$ と置く．g は常微分方程式

$$Dg - \frac{1}{2}g^2 = 0 \tag{4.4–2}$$

を満たすことを示せ．

2) (4.4–2) を解け（一般解を求めよ）．ただし，g が 0 になることがあるかなど，細かいことは無視して良い．

3) (4.4–1) を解け（一般解を求めよ）．ただし，f, g が 0 になることがあるかなど，細かいことは無視して良い．

問 4.5. 行列値の函数 $A\colon \mathbb{R} \to M_{m,n}(\mathbb{R})$ が微分可能であるとは，全ての成分が微分可能であることと定める（これはベクトル値函数が微分可能であることの一般化になっている）．また，A の変数を t とするとき，$M_{m,n}(\mathbb{R})$ 値函数 $\dfrac{dA}{dt}$ を，A を成分ごとに微分することにより定める．つまり，A の (i,j)-成分を a_{ij} とするとき，$\dfrac{dA}{dt}$ を (i,j)-成分が $\dfrac{da_{ij}}{dt}$ であるような行列値函数とする．$\dfrac{dA}{dt}$ を A の**導函数**と呼ぶ（これもベクトル値函数の導函数の一般化になっている）．

1) $A\colon \mathbb{R} \to M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B\colon \mathbb{R} \to M_{n,l}(\mathbb{R})$ を微分可能とする．$AB\colon \mathbb{R} \to M_{m,l}(\mathbb{R})$ を $(AB)(t) = A(t)B(t)$ により定めると AB は微分可能で，

$$\frac{d(AB)}{dt} = \frac{dA}{dt}B + A\frac{dB}{dt}$$

が成り立つことを示せ．

2) $A\colon \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ とし，$A\colon \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ とみなしたとき微分可能であるとする．このとき，$A^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ を $A^{-1}(t) = A(t)^{-1}$ により定めると，A^{-1} も微分可能であって

$$\frac{d(A^{-1})}{dt} = -A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1}$$

が成り立つことを示せ．

ヒント：A^{-1} が微分可能であることを示すためには，A^{-1} の各成分が微分可能であることを示せばよい．このことを踏まえて，A^{-1} を行列式と余因子行列を用いて表す方法について調べてみよ．A^{-1} が微分可能であることが分かってしまえば，$AA^{-1} = E_n$（E_n は単位行列である．I_n で表すことも多い）の両辺を微分すれば「公式」は容易に示せる．

以下の問は「線型代数学」,「線型代数学続論」や「常微分方程式」などで扱う内容であるが，予告として挙げる．

問 4.6 ***.** 定数係数の線型常微分方程式系

$$\begin{cases} Df_1 = a_{11}f_1 + a_{12}f_2 + b_1, \\ Df_2 = a_{21}f_1 + a_{22}f_2 + b_2 \end{cases} \tag{4.6–1}$$

について考える．定義により $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ は定数である．そこで $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ と置けば，$A \in M_2(\mathbb{R})$ である．また，$\mathbb{R}^2$ 値函数 b を $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$，$\mathbb{R}^2$ 値未知函数 f を $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ により定めれば，(4.6–1) は

$$Df = Af + b$$

と書き換えることができる．さて，$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ とし，$\mathbb{R}^2$ 値未知函数 g を $g = Pf$ により定める．$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ と置く．

1) $g_1 = p_{11}f_1 + p_{12}f_2$，$g_2 = p_{21}f_1 + p_{22}f_2$ が成り立つことを確かめよ．

2) A や P は定数行列であることに注意して，

$$Dg = PAP^{-1}g + Pb \tag{4.6–2}$$

が成り立つことを示せ．

従って $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ をうまく選んで（「適当に選んで」と言う），PAP^{-1} を (4.6–2) が解き易くなるようにすることができれば，$f = P^{-1}g$ として f を得ることができる．都合の良い PAP^{-1} として代表的なものには，対角行列，Jordan 標準形や有理標準形などがある（対角行列は Jordan 標準形・有理標準形の特別な場合でもあるが，それ自体重要である）．A についてこのような P を見いだす方法については「線型代数学」「線型代数学続論」で扱う（多くの場合，PAP^{-1} の代わりに $Q^{-1}AQ$ の形で扱うが，$Q = P^{-1}$ とすれば両者は同じことである）．なお，ここでは二つの函数 f_1, f_2 に関する線型常微分方程式系を考えたが，一般に函数が n 個になっても同様である．

問 4.7 ***.** $V = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ は C^2 級であって $D^2 f = -f$ が成り立つ $\}$ と置く．f の変数は t とする．

1) V は $\mathbb{R}$-線型空間であることを示せ．

2) $f \in V$ とする．$g_1, g_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$g_1(t) = f(t)\cos t - Df(t)\sin t,$$

$$g_2(t) = f(t)\sin t + Df(t)\cos t$$

により定める．g_1, g_2 は定数であることを示せ．

3) $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ が存在して $f(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ が成り立つことを示せ．

ヒント：$\begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t) \\ Df(t) \end{pmatrix}$ が成り立つ．

4) $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ とする．$c_1 \cos t + c_2 \sin t = d_1 \cos t + d_2 \sin t$ が恒等的に成り立つならば $c_1 = d_1,\ c_2 = d_2$ が成り立つことを示せ．

5) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to V$ を

$$\varphi\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

により定めると，φ は線型同型写像であることを示せ．

注. 1) 問 4.7 の 3) は V の元の組 $\{\cos t, \sin t\}$ は $\mathbb{R}$ 上 V を**生成する**ことを意味する．また，4) は $\{\cos t, \sin t\}$ は $\mathbb{R}$ 上**線型独立**（一次独立）であることを意味する．これら二つの条件を満たすような V の元の組を V の $\mathbb{R}$ 上の**基底**と呼ぶ．つまり，$\{\cos t, \sin t\}$ は V の基底である．生成，線型独立，基底については「線型代数学」で扱う．

2) 問 4.3 で函数 g を考えたが，見方を変えると $f(x) = g(x)x^n$ であることを仮定した，と考えることもできる．直前で $f(x) = Cx^n$ が解であることを確かめたが，これを踏まえると，2) 以降はこの C を函数としてみた，ということになる．これは**定数変化法**と呼ばれる，微分方程式（常微分方程式に限らない）を解く際に有用な方法の例である．問 4.7 の 2) で g_1, g_2 を定めたが，実はこれらも定数変化法の一つの形である．つまり，これは行き当たりばったりにやっているのではなく，一般の線型常微分方程式系に適用できる方法の特別な場合である．これについても「常微分方程式」で扱うが，その際に微積分だけではなく，線型代数に関する知識が必要となる．

3) 微分方程式は「解いたもの勝ち」の側面が強い．そもそも解が一つも見つからないよりは見つかった方が良いに決まっているし，定数変化法にも見られるように，解を全て求めるための手がかりとして解を一つ求めることは重要である．多少求め方が怪しくとも，求めた函数が解であること自体は厳密に調べることができる（代入して解になっていることを確かめれば良い）．**解を見いだす**方法としては，思い切って大胆に計算してしまうことは有用である．一方,「怪しい」求め方にはいくつか問題もある．例えば，求まった「解」が**本当に解であるかどうか調べ直す必要がある**ことも多いし，大抵の場合には**他に解があるかどうかは改めて調べなければならない**．このようなことを踏まえて微分方程式についてきちんと考察するのは現時点ではまだ難しいし，また，場数の問題でもあるのでこれ以上は触れない．

（以上）