２０１５年度数学II（足助担当）　演習問題 6　　2015/10/21（水）

　全般に K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す．今回は試験的に次のように印を付ける．

無印：解けると期待している．

$*$：少しないし（乃至）結構頑張れば解けると思う．

$**$：解ければ大した物だと思っている（今回は該当なし）．

問 6.1. 以下の行列の逆行列および行列式を求めよ．

※ 計算量を抑える工夫をした方がよい．

$$1)\ \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad 2)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad 3)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad 4)\ \begin{bmatrix} 20 & 40 & 0 \\ 10 & 40 & 20 \\ 20 & 40 & 30 \end{bmatrix}$$

$$5)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad 6)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad 7)\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$8)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 9)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

問 6.2. 次の行列のランクを求めよ．また，もし与えられた行列が正則であれば逆行列を求めよ．

※ 計算量を抑える工夫をした方がよい．

$$1)\ \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & -4 & -6 \\ 3 & -2 & -5 \end{bmatrix} \quad 2)\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -11 & -7 \end{bmatrix} \quad 3)\ \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

問 6.3. $\widetilde{I_r} = \begin{bmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{bmatrix}$ と置く（$\widetilde{I_r}$ はこの講義での記号であって，特に一般的な物では無い．一方，I_r は一般的な記号である）．${}^t\widetilde{I_r}$ を I_r と同様に I_r と適切なサイズの零行列を用いて表せ．

問 6.4. $A \in M_{m,n}(K)$ とする．

1) $m > n$ であって，m 次正方行列 ${}^tAA$ が正則であるような (m, n) と A の例をいくつか挙げよ．

2)* $m < n$ の時，m 次正方行列 ${}^tAA$ は決して正則にならないことを示せ．

ヒント：いくつか方法はあるが，一つの方針を示す（必ずしも従う必要は無い）．適当な $r \geq 0$，$T \in \mathrm{GL}_m(K)$ と $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ が存在して

$$TAS = \widetilde{I}_r = \begin{bmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{bmatrix}$$

が成り立つ．すると $A = T^{-1}\widetilde{I}_r S^{-1}$ が成り立つので，

$$ {}^tAA = ({}^tS^{-1}){}^t\widetilde{I}_r({}^tT^{-1})T^{-1}\widetilde{I}_r S^{-1}$$

が成り立つ．ここで, もし ${}^tAA$ が正則であれば ${}^tS\,{}^tAAS$ も正則である．一方，$({}^tT^{-1})T^{-1}$ を $\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$ と，$T_{11} \in M_r(K)$ となるように区分けすると ${}^t\widetilde{I}_r({}^tT^{-1})T^{-1}\widetilde{I}_r$ が正則でないことが示せる．
注意：例えば直接 ${}^tAA$ の行列式を求めるのは無理ではないが，あまり得策とは言えない．

問 6.5. $n \geq 2$ とすると，n 次正方行列 $A,\ B$ についての等式

$$\det(A+B) = (\det A) + (\det B)$$

は一般には成り立たない．

1) 例（反例）を挙げることによってこのことを示せ．必要であれば $n = 2$ としてよい．
2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ のとき，上の等式が成り立つような $B \in M_2(K)$ を全て求めよ．

問 6.6*. $n \geq 2$ とし，$x_1, \ldots, x_n \in K$ とする．$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{bmatrix}$ と置く．A の余因子行列を求めよ．
ヒント：恐らくお手軽な求め方はない（簡単に見える物は何かしらの道具を用いることになっている）ように思われる．一つの求め方としては，Vandermonde の行列式の求め方を真似て，例えば（$n = 4$ の場合）$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ {x_2}^3 & {x_3}^3 & {x_4}^3 \end{bmatrix}$ などの行列式を求めることが挙げられる．結果自体は汚くない．

話を変えて $A \in M_{m,n}(K)$, $c \in K^m$ とし，$x \in K^n$ に関する方程式 $Ax = c$ を考える．係数行列 A あるいは拡大係数行列 $[A\ c]$ に行（左）基本変形を施すことは解空間 $V_{A,c} = \{x \in K^n \mid Ax = c\}$ を調べるのに有用であった．ここでは列（右）基本変形について考えてみる．

拡大係数行列 $[A\ c]$ に勝手な列基本変形を施すのは良くないことがすぐに分かる．例えば

$$(*) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ \qquad x_2 = 1 \end{cases}$$

を考えてみる．この方程式は，行列を用いれば $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$ と表される．簡単に分かるように，解は $x_1 = 1,\ x_2 = 1$ である．ところで，拡大係数行列 $\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ を考え，2 列目から 3 列目を引いてみる．すると $\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ を得るが，これに対応する方程式は

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2, \\ \qquad 0 = 1 \end{cases}$$

である．これは二番目の式が決して成り立たないので解を持たない．特に，この方程式の解空間と，方程式 $(*)$ の解空間は異なる．これは x の係数の部分と定数項を混ぜてしまったために起きた困難である．そこでこれらを混ぜないことにして，A に対して列基本変形を施すことにする（c に対しては列基本変形は定数倍以外は施しようが無いことに注意）．A の代わりに AP を考えると，方程式 $APy = c$ が得られる．このような y は $Ay = c$ を満たすとは限らないが，$x = Py$ と置けば x は $Ax = c$ を満たす．逆に $Ax = c$ が成り立つ時，$y = P^{-1}x$ と置けば y は $APy = c$ を満たす．

問 6.7. $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ とする．$f\colon V_{A,c} \to V_{AP,c},\ g\colon V_{AP,c} \to V_{A,c}$ をそれぞれ

$$f(x) = P^{-1}x,$$
$$g(y) = Py$$

により定めると，f, g は全単射であることを示せ．

従って $V_{A,c}$ と $V_{AP,c}$ は同一視できるが，等しいとは限らない．それでは右基本変形は具体的には何を表しているのか考えてみる．講義の記号をそのまま用いる．

問 6.8. 1) $\lambda \in K,\ \lambda \neq 0$ とし，$P = P_n(i;\lambda)$ とする．このとき，新しい方程式 $APy = c$ は，変数 x の代わりに新しい変数 $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ \dfrac{1}{\lambda}x_i \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ を考えて，方程式 $Ax = c$ を y に関して書き直した物であることを示せ．

2) $P = Q_n(i,j)$（但し $i \neq j$）とする．このとき，新しい方程式 $APy = c$ は，変数 x の代わりに新しい変数 $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_j \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ (i \\ \\ (j \\ \\ \\ \end{array}$ を考えて，方程式 $Ax = c$ を y に関して書き直した物であることを示せ．

3) $\mu \in K$, $i \neq j$ として $P = R_n(i,j;\mu)$ とする．このとき，新しい方程式 $APy = c$ は，変数 x の代わりに新しい変数 $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_j \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i - \mu x_j \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ (i \\ \\ (j \\ \\ \\ \end{array}$ を考えて，方程式 $Ax = c$ を y に関して書き直した物であることを示せ．

行列の行基本変形と列基本変形は，行列式やランクの計算に関して言えばあまり差を意識する必要は無かったが,（連立）一次方程式を解こうと思うと，このように大きな差がある．これは方程式 $Ax = c$ において x と c がどの空間に属しているか異なることによる．つまり，$x \in K^n$ であって，$c \in K^m$ である．詳しいことは数理科学概論 II に譲るが，行基本変形は K^m をいじる操作であって，K^n の部分集合である解空間 $V_{A,c}$ には影響しない．一方，列基本変形は K^n をいじる操作であって，必然的に $V_{A,c}$ に影響を及ぼす．うまく用いれば有用であるが，問 6.8 に見るように影響はそれなりに複雑なので，注意を要する．

（以上）