２０１５年度数学II（文科向け，足助担当）　演習問題 4　2015/10/7（水）

全般に K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す．また，$*$ がついている問はやや難しい．

定義. $A \in M_n(K)$ とする．A の対角成分の和を $\operatorname{tr} A$ で表し，A の**トレース**あるいは跡（せき）と呼ぶ．トレースは $\operatorname{trace} A$ で表すこともある．

問 4.1. $\lambda \in K$ とする．$A \in M_n(K)$ について $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr} A$，$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ がそれぞれ成り立つことを示せ．

問 4.2. 1) $A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,m}(K)$ とすると $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$ が成り立つことを示せ．

2) $A \in M_n(K)$ とする．$P \in \mathrm{GL}_n(K)$ について $\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr} A$ 及び $\det(P^{-1}AP) = \det A$ が成り立つことを示せ．

※ 行列の積の方が，トレースや行列式よりも演算の優先度は高いので，厳密には括弧は不要である．

問 4.3. $A \in M_n(K)$ とし，$F\colon M_n(K) \to K$ を，$X = [x_1\ \cdots\ x_n] \in M_n(K)$ について

$$F(X) = \det[Ax_1\ x_2\ \cdots\ x_n] + \det[x_1\ Ax_2\ x_3\ \cdots\ x_n] + \cdots + \det[x_1\ x_2\ \cdots\ x_{n-1}\ Ax_n]$$

と置くことにより定める．このとき，$F(X) = (\operatorname{tr} A) \det X$ が成り立つことを示せ．
ヒント：真面目に計算しても示せるが，得策ではない．

問 4.4. $a_{ij}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$1 \leq i, j \leq n$ を微分可能な函数とし，A を a_{ij} を成分とする行列とする．A は $\mathbb{R}$ 上定義された $M_n(\mathbb{R})$ 値函数である．変数を x とし，$A = [a_1\ \cdots\ a_n]$ とすると，

$$\frac{d \det A}{dx} = \det\left[\frac{da_1}{dx}\ a_2\ \cdots\ a_n\right] + \det\left[a_1\ \frac{da_2}{dx}\ a_3\ \cdots\ a_n\right] + \cdots + \det\left[a_1\ \cdots\ a_{n-1}\ \frac{da_n}{dx}\right]$$

が成り立つことを示せ．必要なら，$f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が微分可能であるならば $\dfrac{d(fg)}{dx} = \dfrac{df}{dx}g + f\dfrac{dg}{dx}$ が成り立つことを用いよ．

問 4.5. 次の連立一次方程式をクラメルの公式を用いる方法と，掃き出しを用いる方法の二通りで解け．

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2, \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 = 4 \end{cases}$$

※ クラメルの公式を用いると面倒くさい，というのがこの問の主眼である．興味があれば「一般的」（定義する必要がある）な方程式について計算量を評価してみよ．

$\{1,\dots,n\}$ を入れ替える写像を n 次の置換と呼び，n 次の置換全体のなす集合を $\mathfrak{S}_n$ で 表すのであった．特に，$\sigma\in\mathfrak{S}_n$ とする．σ を $\{1,\dots,n\}$ から $\{1,\dots,n\}$ への写像と見なすと全単射である．従って σ の逆写像（逆の操作に対応する） σ^{-1} が存在する．

問 4.6. $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ について $E(\sigma)\in M_n(K)$ を，$(\sigma(i),i)$-成分（$1\le i\le n$）が 1 で，外の成分は全て 0 であるような行列とする．

1) e_i を K^n の第 i 基本ベクトルとすると $E(\sigma)e_i=\sigma(i)$ が成り立つことを示せ．
2) $\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_n$ について，$\tau\sigma$ を条件 $\tau\sigma(i)=\tau(\sigma(i))$，$1\le i\le n$，により定める（この $\tau\sigma$ を $\sigma\tau$ と表す流儀もあるので注意すること．3) のような問題が起きる）．$E(\tau)E(\sigma)=E(\tau\sigma)$ が成り立つことを示せ．
3) $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ を $\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n)\end{pmatrix}$ で表すことがある．この記法に従って $\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_3$ を $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$，$\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$ により定める．$\sigma\tau\ne\tau\sigma$ が成り立つことを示せ．
4) $E(\sigma)$ は正則であって，$E(\sigma)^{-1}=E(\sigma^{-1})$ が成り立つことを示せ．
5) $\det E(\sigma)=\operatorname{sgn}\sigma$ が成り立つことを示せ．
6) $\operatorname{sgn}(\tau\sigma)=\operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\sigma)$ が成り立つことを示せ．
7) $\Delta(x_1,\dots,x_n)=\displaystyle\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)$ を $x_1,\dots,x_n$ の差積とする．$\Delta(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})=\operatorname{sgn}(\sigma)\Delta(x_1,\dots,x_n)$ が成り立つことを示せ．

問 4.7. $A\in M_n(K)$ とし，$A=[a_1\ \cdots\ a_n]$ と列ベクトルを用いて表す．

1) 任意の $x\in K^n$ について
$$Bx=\begin{bmatrix}\det[x\ a_2\ \cdots\ a_n]\\ \det[a_1\ x\ a_3\ \cdots\ a_n]\\ \vdots\\ \det[a_1\ \cdots\ a_{n-1}\ x]\end{bmatrix}$$
が成り立つような $B\in M_n(K)$ を求めよ．
2) $A\in\mathrm{GL}_n(K)$ とする．また，B は 1) のように定める．任意の $x\in K^n$ について
$$BCx=\begin{bmatrix}\det[Cx\ a_2\ \cdots\ a_n]\\ \det[a_1\ Cx\ a_3\ \cdots\ a_n]\\ \vdots\\ \det[a_1\ \cdots\ a_{n-1}\ Cx]\end{bmatrix}=x$$
が成り立つように $C\in M_n(K)$ を定めよ．また，この C について $BC=I_n$ が成り立つことを示せ．

問 4.8. $n>1$ とする．また，$A\in M_n(K)$ について A の余因子行列を $\widetilde{A}$ で表す．

1) $A\in\mathrm{GL}_n(K)$ とする．

a) $\widetilde{A}$ を A を用いて表せ.

b) $\det \widetilde{A}$ を求めよ.

c) $\widetilde{A} \in \mathrm{GL}_n(K)$ が成り立つことを示せ.

d) $n > 2$ とする. $\widetilde{(\widetilde{A})} = (\det A)^{n-2} A$ が成り立つことを示せ.

2)* $A \in M_n(K)$ は正則でないとする. このとき $\widetilde{(\widetilde{A})} = O$ が成り立つことを示せ.

以下は誤差評価に関する問である. 何かしらの状況を（数理）モデル化し, 数式で表す. 数式の「解」が実際に起きる現象に対応する. 状況の変化は数式の変化として記述される. このときに「解」がどのように変化するかは, 現象がどのように変化するかに対応する. ここでは, 行列で話が済む範囲の, 更に最も基本的な場合について扱う. 実際にはもっと複雑な状況が現れ, これらを扱うのには微積分の知識も必要になるのが一般的である.

定義. $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(K)$ について $\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$ と置く. $\|A\|$ は A の **2-ノルム**と呼ばれる.

2-ノルムはベクトルの長さにあたる（実際, $v \in K^n = M_{n,1}(K)$ ならば $|v|$ は v の長さである）. また, 1-ノルムや 3-ノルムなども, ここでは扱わないが存在する.

次が成り立つ. ベクトルの長さについては数理科学概論 II で扱うので, ここでは問とはしないが, 難しくはないので興味があれば証明を考えてみよ.

命題 4.9. $A, A' \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,l}(K)$, $\lambda \in K$ とする.

1) $\|A + A'\| \leq \|A\| + \|A'\|$.

2) $\|\lambda A\| = |\lambda| \, \|A\|$.

3) $\|A\| \geq 0$ であって, 等号が成り立つのは $A = O_{m,n}$ の時, その時のみである.

4) $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$.

1) から 3) は, 行列の 2-ノルムもベクトルの長さと同様の性質を持つ, ということである. 4) は行列特有の話であるが, 余弦定理（の帰結）の一般化である. 詳しくは計量線型空間, 特に 4) については（コーシー・）シュワルツの不等式について調べてみよ.

問 4.10. 1) $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ とする. $|a_{ij}| \leq \|A\|$ が成り立つことを示せ. また, 等号が成り立つための（必要十分）条件を求めよ.

2) $A = I_n$ とする. $\delta > 0$ であって, $B \in M_n(K)$, $\|B - A\| < \delta \Rightarrow \det B \neq 0$ が成り立つものを一つ定めよ.
ヒント：例えば $\left|\det B - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{4}$ が成り立てば $\det B \neq 0$ が成り立つ.

3) $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ とする．

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ (\|A - B\| < \delta \Rightarrow B \in \mathrm{GL}_n(K))$$

が成り立つことを示せ．標語的に言えば，A とあまり各成分が変わらない行列は正則である，ということである．

ヒント：まず $A = I_n$ の場合に示す（例えば 2) を参考にせよ）．一方，命題 4.9 により

$$\left\|I_n - A^{-1}B\right\| = \left\|A^{-1}(A-B)\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|A - B\|$$

が成り立つ（このことは認めて良い）．

4) $A \in M_n(K)$ とする．$\forall \epsilon > 0,\ \exists B \in \mathrm{GL}_n(K),\ \|A - B\| < \epsilon$ が成り立つことを示せ．

ヒント：ある $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ について PA は階段行列である．階段行列は一般には正則ではないが，少し修正して（あまり成分が変わらないようにして）正則にすることができる．このことを示した上で，ノルムに関する不等式をうまく用いればよい．意味としては，任意の行列は正則行列で近似できるということである．

問 4.11*. $A \in M_n(K)$ とする．

$$\exists \delta > 0,\ B \in M_n(K),\ (\|A - B\| < \delta \Rightarrow \operatorname{rank} B \geq \operatorname{rank} A)$$

が成り立つことを示せ．

クラメルの公式は，実際の計算という意味ではほとんど「役立たず」であるが，例えば次のようなことを示そうとすると非常に強力である（逆に，実際の手計算ができても次のようなことは示せない）．

問 4.12. $A \in \mathrm{GL}_n(K),\ c \in K^n$ を用いて $Ax = c$ と表される方程式を考える．解は $x = A^{-1}c$ で与えられる．

1) A を固定して c を変化させることを考える．$\forall \epsilon > 0,\ \delta > 0,\ (c' \in K^n,\ \|c - c'\| < \delta \Rightarrow \left\|A^{-1}c - A^{-1}c'\right\| < \epsilon)$ が成り立つことを示せ（まずはクラメルの公式を用いて示せ．なお，命題 4.9 を認めれば容易である）．
2) c を固定して A を変化させることを考える．$\forall \epsilon > 0,\ \delta > 0,\ (A' \in \mathrm{GL}_n(K),\ \|A - A'\| < \delta \Rightarrow \left\|A^{-1}c - (A')^{-1}c\right\| < \epsilon)$ が成り立つことを示せ（まずはクラメルの公式を用いて示せ．命題 4.9 を認めればやはり容易である）．
3) $\forall \epsilon > 0,\ \delta > 0,$

$$(A' \in \mathrm{GL}_n(K),\ \|A - A'\| < \delta,\ c' \in K^n,\ \|c - c'\| < \delta \Rightarrow \left\|A^{-1}c - (A')^{-1}c'\right\| < \epsilon)$$

が成り立つことを示せ．

（以上）