２０１５年度数学II（文科向け，足助担当）　演習問題 1　　2015/9/16（水）

'15/9/16：問 1.1 を削除．以降の問番号を変更．問 1.6（旧 1.7）の式の表現を変更．

'15/9/17：問 1.6 が 1.5 と重複していた上に誤りであったので削除．以降の問番号を変更．

全般に K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す．

問 1.1. $z, z', z'' \in \mathbb{C}$ について以下が成り立つことを示せ．

1) $(z+z')+z'' = z+(z'+z'')$．この等しい和を $z+z'+z''$ とも表す．
2) $z+z' = z'+z$.
3) $(zz')z'' = z(z'z'')$．この等しい積を $zz'z''$ とも表す．
4) $zz' = z'z$.
5) $z(z'+z'') = zz'+zz''$.
6) $z \neq 0$ ならば $w \in \mathbb{C}$ が存在して $zw = wz = 1$ が成り立つ．このような w は一意的であるので z の **（積に関する）逆元**，あるいは**逆数**と呼び z^{-1} あるいは $\dfrac{1}{z}$ で表す．

簡単なので問とはしないが，このほかにも

7) $z+0 = 0+z = z$.
8) $-z = (-1)z$ と定めると $z+(-z) = (-z)+z = 0$.
9) $1z = z1 = z$.
10) $0z = z0 = 0$.

が成り立つ．

問 1.2. $z, z' \in \mathbb{C}$ とする．

1) $|z|^2 = z\bar{z}$ が成り立つことを示せ．
2) $|zz'| = |z|\,|z'|$ が成り立つことを示せ．
3) $x \in \mathbb{R}$ とし，x を実数と考えたときの絶対値を（いつもの通り）$|x|$ とする．$x \in \mathbb{C}$ でもあるから，x を複素数と考えたときの絶対値も定まる．これを仮に $|x|'$ とすると，$|x|' = |x|$ が成り立つことを示せ．
4) $z, z' \neq 0$ とする．$\arg(zz') = \arg z + \arg z' \mod 2\pi\mathbb{Z}$ が成り立つことを示せ．ここで，$\mathrm{mod}\ 2\pi\mathbb{Z}$ は偏角の不定性の分は無視する，という意味である（例えば $0 = 2\pi$ と考える）．

問 1.3. 1) $O_n \in M_n(K)$ は正則でないことを示せ．

2) $A \in M_n(K)$ を対角行列とする．A の (i,i)-成分を a_i とすると，A が正則であることと，$a_1a_2\cdots a_n \neq 0$ が成り立つことは同値であることを示せ．

問 1.4. 1) $n = 1$ ならば $A, B \in M_1(K)$ は可換であることを示せ．$n \geq 2$ の時，可換でないような $A, B \in M_n(K)$ の例を挙げよ．

2) $A \in M_{m,n}(K),\ B \in M_{n,l}(K)$ とする．また，$AB = O_{m,l}$ とする．$m = n = 1$ あるいは $n = l = 1$ のいずれかが成り立つのであれば $A = O$ あるいは $B = O$ が成り立つことを示せ．一方，$m = n = 1$ あるいは $n = l = 1$ のいずれも成り立たないのであれば，$A \in M_{m,n}(K),\ B \in M_{n,l}(K)$ であって，$A \neq O,\ B \neq O$ であるような例が存在する．A, B の具体例（零因子の具体例）を m, n, l に関して一組ずつ挙げよ．

3) $n \geq 2$ とする．零行列ではないが，正則ではないような $M_n(K)$ の元を一つ挙げよ．

4) $n = 1$ とする．$A \in M_1(K)$ が冪等であるならば A は 1 の冪根（何乗かすると 1 になる数）であることを示せ．また，$A \in M_1(K)$ が冪零であるならば $A = [0]\,(= 0)$ であることを示せ．

※ K と K^1 は括弧の付け外しで同一視したのであった．

5) $n > 1$ とする．単位行列ではないような $A \in M_n(\mathbb{R})$ の元で，冪等であるようなものを一つ挙げよ．また，零行列ではない $A \in M_n(K)$ であって，冪零であるようなものを一つ挙げよ．

問 1.5. $A, B, C \in M_n(K),\ \lambda \in K$ とするとき，次が成り立つことを示せ．

1) $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$．$[B + C, A] = [B, A] + [C, A]$.
2) $[\lambda A, B] = \lambda[A, B]$．$[B, \lambda A] = \lambda[B, A]$.
3) $[A, A] = O$.
4) $[A, B] = -[B, A]$.
5) $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = O$．この関係式を**ヤコビ恒等式**（the Jacobi identity）と呼ぶ．

性質 1)，2) を指して $[\cdot, \cdot]$ は**双線型性**を持つと言う[†1]．また，性質 3) あるいは 4) を指して $[\cdot, \cdot]$ は**交代性**を持つと言う．後日扱う行列式も「交代性」を持つ．行列式についても，3) や 4) と類似のことが成り立つ．

問 1.6. $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = O$ が成り立つことを示せ．また，$[A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]]$ が成り立つことを示せ．

二番目の式は次のような意味を持つ．微分可能な函数 $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の積として得られる函数 $fg\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の微分について **Leibnitz 則**

$$\frac{d(fg)}{dx} = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}$$

が成り立つ（変数を x とした）．これを踏まえて，$[A, \cdot]$ を $M_n(K)$ から $M_n(K)$ への（線型）写像と考え，f_A で表す．すると，二番目の式は

$$f_A([B, C]) = [f_A(B), C] + [B, f_A(C)]$$

[†1] 文字通り「双（両方とも）線型である」ということであるが，線型性については追々述べる．本格的には数理科学概論 II で扱う．

と書き換えることができる．$[\cdot,\cdot]$ を函数の掛け算と，f_A を $\dfrac{d}{dx}$ と似たような物だと漠然と考えると，最後の式は Leibnitz 則である．**ベクトル場**という概念を用いるとこれは正当化できる．ベクトル場に関しては，ベクトル解析，あるいは教員によっては常微分方程式で扱う．

問 1.7. 行列の積を天下り的に定義したが，これは次のように考えると自然に得られる．連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2, \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases} \tag{1.7–1}$$

を考える．$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$，$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$，$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$ とする．x, y は数ベクトルであるが行列でもあることに注意して，方程式 (1.7–1) が

$$Ax = y$$

と表されるように行列の積が定義されているものと仮定する（具体的にどのようにすべきなのかはこれから調べる）．ここで，y についても連立一次方程式

$$\begin{cases} b_{11}y_1 + \cdots + b_{1m}y_m = z_1, \\ b_{21}y_1 + \cdots + b_{2m}y_m = z_2, \\ \qquad\vdots \\ b_{l1}y_1 + \cdots + b_{lm}y_m = z_l \end{cases} \tag{1.7–2}$$

を考える（添字の動く範囲に注意）．$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{lm} \end{bmatrix}$，$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_l \end{bmatrix}$ と置けば，(1.7–2) は

$$By = z$$

と表されるはずである．すると，

$$B(Ax) = By = z \tag{1.7–3}$$

が成り立つ．例えば $(AB)C = A(BC)$ のような,「当たり前」[†2]のことが成り立つと考えると，

$$B(Ax) = (BA)x \tag{1.7–4}$$

[†2]実際に証明するとそれなりに手間がかかったことに注意.

が成り立つはずである．ここで，(1.7–3) を具体的に書き下してみる．そのためには (1.7–2) に (1.7–1) を代入すれば良い．

問． $1 \leq i \leq l$ について

$$\begin{aligned} z_k =& (b_{i1}a_{11} + b_{i2}a_{21} + \cdots + b_{im}a_{m1})x_1 \\ &+ (b_{i1}a_{12} + b_{i2}a_{22} + \cdots + b_{im}a_{m2})x_2 \\ &+ \cdots \\ &+ (b_{i1}a_{1n} + b_{i2}a_{2n} + \cdots + b_{im}a_{mn})x_n \end{aligned}$$

が成り立つことを示せ．関係式 (1.7–4) を踏まえると，BA がもし定まるのであれば，それは $M_{l,n}(K)$ の元であって，その (i, j)-成分は

$$b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \cdots + b_{im}a_{mj} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj}$$

で与えられているはずである．このように定めれば，実際に (1.7–1) は (1.7–2) と表されるし，また，$(AB)C = A(BC)$ が成り立つのであった．

方程式 $Ax = c$ とすると，c が与えられたときに x を定めるのが普通である．c を y と書き換えて $Ax = y$ とし，考え方を変えて，y が x により（A を用いて）定まっていると考える．すると，$x \in K^n$ に対して $y = Ax \in K^m$ を与える写像が得られたことになる．つまり，$A \in M_{m,n}(K)$ と K^n の掛け算は写像

$$f_A \colon K^n \to K^m,\ f(x) = Ax$$

を定めていると考えることができる．このような考え方は，後日連立一次方程式の解について調べる際に重要である．また，数理科学概論 II では主な題目の一つとして扱われる．

ここでは深入りは避け，次の重要な事実を指摘するにとどめる．

問 1.8. $A \in M_{m,n}(K)$ とし，$f \colon K^n \to K^m$ を $f(x) = Ax$ により定める．この時以下が成り立つことを示せ．

1) $\forall x, x' \in K^n,\ f(x + x') = f(x) + f(x')$.
2) $\forall x \in K^n,\ \lambda \in K,\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

一般に，問 1.8 の性質を持つ写像を ***K*-線型写像**と呼ぶ．これについても本格的には数理科学概論 II で扱う．

（以上）