２０１５年度微分積分学（理 I 32～35 組向け，足助担当）　演習問題 1　　2015/6/8（月）

問 1.1. $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ とし，A の (i,j) 成分を a_{ij} とする．このとき $\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$ と定める．また，$B \in M_{n,l}(\mathbb{R})$ とし，${}^tA = (a_1 \ \cdots \ a_m)$, $B = (b_1 \ \cdots \ b_l)$ と列ベクトルを用いて表す.

1) $m = l = 1$ であれば $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$ が成り立つことを示せ.
   ヒント：シュワルツの不等式を用いるのが簡単である.
2) $\langle \cdot | \cdot \rangle$ で $\mathbb{R}^n$ の標準的な内積を表す．すると AB の (i,j)-成分は $\langle a_i \,|\, b_j \rangle$ に等しいことを示せ.
3) $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$ が成り立つことを示せ.
   ヒント：まず $\|AB\|^2 \leq \|A\|^2\,\|B\|^2$ が成り立つことを示すとよい.

問 1.2. $D \subset \mathbb{R}^n$ を開集合，$f \colon D \to \mathbb{R}^m$ を写像とする．f は $x_0 \in D$ において全微分可能であるとする．$v \in \mathbb{R}^n$ とすると，f は x_0 において v 方向に微分可能であって，$D_v f(x_0) = Df(x_0)v$ が成り立つことを示せ．特に，$v \in \mathbb{R}^n$ に $D_v f(x_0)$ を与える対応を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像とみなすと，これは $\mathbb{R}$-線型写像である.

問 1.3. ここでは次を示すことを目標とする.

> **定理.** $D \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし，$f \colon D \to \mathbb{R}^m$ を写像とする．$x_0 \in D$ とし，十分小さい $r > 0$ が存在して $B_{x_0}(r)$ 上で $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ が存在するとする．もし $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ がいずれも x_0 で連続であるならば $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$ が成り立つ.

1) $m = 1$，つまり f が実数値函数である場合に定理が成り立つと仮定して，一般の m についても定理が成り立つことを示せ.

必要なら $\mathbb{R}^n$ の座標の順序を入れ替えて $i = 1$, $j = 2$ としてよい．更に，$x_0 = (a_1, \ldots, a_n)$ と成分で表し，$g(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, a_3, \ldots, a_n)$ と定め，$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1, a_2) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1, a_2)$ が成り立つことを示せば十分である[†1]．そこで以下では $n = 2$ とする．$(t,s) \in \mathbb{R}^2$, $\|(t,s)\| < r$ とする（ここでは $\mathbb{R}^2$ の元は行ベクトルを用いて表す）．まず x_2 の函数 $g(a_1 + s, x_2) - g(a_1, x_2)$ を考える.

[†1] 細かいことではあるが，厳密には g の定義域が $\mathbb{R}^2$ の，(a_1, a_2) を含むある開集合であることを確かめる必要がある.

2) $x_2 \in [a_2, a_2+t]$ とすると，ある $\theta_2 \in (0,1)$ について

$$
\begin{aligned}
&(D_2 g(a_1+s, a_2+\theta_2 t) - D_2 g(a_1, a_2+\theta_2 t))t \\
&= g(a_1+s, a_2+t) - g(a_1+s, a_2) - g(a_1, a_2+t) + g(a_1, a_2)
\end{aligned}
$$

が成り立つことを示せ.

3) x_1 の函数 $D_2 g(x_1, a_2+\theta_2 t)$ を考える．$x_1 \in [a_1, a_1+s]$ とすると，$\theta_1 \in (0,1)$ が存在して

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1+\theta_1 s, a_2+\theta_2 t)s \\
&= \frac{\partial g}{\partial x_2}(a_1+s, a_2+\theta_2 t) - \frac{\partial g}{\partial x_2}(a_1, a_2+\theta_2 t)
\end{aligned}
$$

が成り立つことを示せ.

2)，3) により $(\theta_1, \theta_2) \in (0,1) \times (0,1)$ が存在して

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1+\theta_1 t, a_2+\theta_2 s)ts \\
&= g(a_1+t, a_2+s) - g(a_1+t, a_2) - g(a_1, a_2+s) + g(a_1, a_2)
\end{aligned}
$$

が成り立つことが示せた.

4) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}$ は (a_1, a_2) において連続であることに注意して，

$$
\lim_{w \to 0} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1+w_1, a_2+w_2) = D_1 D_2 g(a_1, a_2)
$$

が成り立つことを示せ.

5) $\|(t,s)\| \to 0$ のとき，$\|(\theta_1 t, \theta_2 s)\| \to 0$ であることに注意して

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1, a_2) \\
&= \lim_{\|(t,s)\| \to 0} \frac{g(a_1+t, a_2+s) - g(a_1+t, a_2) - g(a_1, a_2+s) + g(a_1, a_2)}{ts}
\end{aligned}
$$

が成り立つことを示せ.

6)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1} g(a_1, a_2) \\
&= \lim_{\|(t,s)\| \to 0} \frac{g(a_1+t, a_2+s) - g(a_1, a_2+s) - g(a_1+t, a_2) + g(a_1, a_2)}{ts}
\end{aligned}
$$

が成り立つことを示せ.

ヒント：ここまでの議論において，x_1 と x_2 を入れ替えてみよ.

7) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1, a_2) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1} g(a_1, a_2)$ が成り立つことを示せ.

問 1.4. ここでは次の定理のうち，1) で $-\infty = a$ の場合を示すことを目標とする．他の場合は大差ないので省略する．

定理 (ロピタルの定理)**.** $a < b$ とする．ただし，$a = -\infty$, $b = +\infty$ の場合も許す．また，$f, g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ を微分可能であって，(a, b) 上 Dg は 0 にならないとする．

1) $\displaystyle\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a+0} g(x) = 0$ とし，$\displaystyle\lim_{x \to a+0} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = \alpha$ とする．ただし，$\alpha = +\infty$ あるいは $\alpha = -\infty$ の場合も許す．このとき，g は (a, b) 上 0 にならず，$\displaystyle\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ が成り立つ．条件「$x \to a + 0$」を「$x \to b - 0$」としても同様である．
2) 1) の最初の条件を $\displaystyle\lim_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty$, $\displaystyle\lim_{x \to a+0} g(x) = \pm\infty$ とする（複号任意）．このときも同様のことが成り立つ．条件「$x \to a + 0$」を「$x \to b - 0$」としても同様である．

注. 逆はいずれも正しくない．問 1.5 を参照のこと．また，2) では g は (a, b) 上 0 になる可能性はあるが，$\exists \delta > 0,\ 0 < x - a < \delta \Rightarrow g(x) \neq 0$ が成り立つ．

以下では $a = -\infty$ とする．

1) g は $(-\infty, b)$ 上狭義単調増加あるいは狭義単調減少であることを示せ．
   ※ Dg が連続であるかどうかは分からないので，例えば Dg が常に正であるか等はすぐには分からない．
2) $(-\infty, b)$ 上 g は 0 にならないことを示せ．

さて，$\varepsilon > 0$ とする．仮定により $\exists M > 0,\ x < -M \Rightarrow \left| \dfrac{Df(x)}{Dg(x)} - \alpha \right| < \varepsilon$ が成り立つ（$-\infty < a$ の場合には適宜書き換える必要がある）．一方，

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(t)}{g(x) - g(t)} \right| &= \left| \frac{f(x)g(x) - f(x)g(t) - f(x)g(x) + f(t)g(t)}{g(x)(g(x) - g(t))} \right| \\
&= \left| \frac{f(x)g(t) - f(t)g(x)}{g(x)(g(x) - g(t))} \right|
\end{aligned}$$

が成り立つ．

3) x を固定すると，$\dfrac{f(x)g(t) - f(t)g(x)}{g(x)(g(x) - g(t))}$ は $t \to -\infty$ で 0 に収束する連続函数であることを示せ．また，ある $M' > 0$ が存在して $t < -M'$ であれば $\left| \dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x) - f(t)}{g(x) - g(t)} \right| < \varepsilon$ が成り立つことを示せ．

$t < x$ とすると，コーシーの平均値の定理により，ある $u \in (t, x)$ について $\dfrac{f(x) - f(t)}{g(x) - g(t)} = \dfrac{Df(u)}{Dg(u)}$ が成り立つ．

4) $x < -\max\{M, M'\}$ であれば $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - \alpha\right| < 2\varepsilon$ が成り立つことを示せ．

問 1.5. $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とする．

1) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $g(x) = x$ とする．f は $x = 0$ で微分可能であることを示せ．また，$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f}{g}(x)$ は存在するが $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{Df}{Dg}(x)$ は存在しないことを示せ（収束しないことはきちんと収束の定義に基づいて示すこと）．

2) $f(x) = \sin x,\ g(x) = x$ とする．$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f}{g}(x)$ は存在するが $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{Df}{Dg}(x)$ は存在しないことを示せ（収束しないことはきちんと収束の定義に基づいて示すこと）．

問 1.6. $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $F(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ により定める．また，$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ と置く．arctan の枝を一つ選び，$G\colon R \to \mathbb{R}^2$ を $G(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \dfrac{y}{x}\right)$ により定める．

1) 全微分 DF を求めよ．$(x, y) = F(r, \theta)$ とすると，(r, θ) の範囲を適切に定めればこれは変数変換（座標変換）と考えることができる．このようなときには DF を $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ などと表すことがある．

2) 全微分 DG を求めよ．また，DG が arctan の枝の選び方によらないことを示せ．

3) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とし，$D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r, -\alpha < \theta < \beta\}$ と置く．$G \circ F$ が恒等写像となるような α, β をなるべく D が大きくなるように定めよ．

4) $F \circ G$ は恒等写像であることを示せ．

5) $(DG \circ F)DF$ と $(DF \circ G)DG$ を求めよ．

問 1.7. $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は微分可能であるとする．また，g は区間 I 上で 0 にならないとする．arctan の枝を一つ選び，$\theta(t) = \arctan \dfrac{f(t)}{g(t)}$ と定める．$D\theta(t)$ を f, g を用いて表せ．また，$D\theta(t)$ は arctan の枝の選び方によらないことを示せ．

（以上）