２０１２年度数学IA 演習（理I 35–39 組）　第７回　　'12/10/23（火）４限

'12/10/23 誤植の訂正,
'12/10/30 問 7.3，問 7.10 の 2) と対数函数に関する記述の誤植を修正
'12/11/30 問 7.11 の誤植の修正
'13/1/29 問 7.6 の誤植の修正

問 7.1. $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{Z}$ を連続函数とする．このとき f は定数函数（定値函数）であることを示せ．$g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{Q}$ を連続とすると，g についてはどうであるか調べよ．

問 7.2. $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ とし，これらは線型独立であるとする．ある $\delta > 0$ が存在して，$w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}^n$ が $\forall i,\ \|w_i - v_i\| < \delta$ をみたすならば $w_1, \ldots, w_n$ は線型独立であることを示せ．

ヒント：行列式を考えてみよ．

問 7.3. $U \subset \mathbb{R}^n$ とし，$f\colon U \to \mathbb{R}^m$ を函数とする．

1) f が U 上一様連続であるならば，f は U（至る所）上連続であることを示せ．
2) $U = \mathbb{R}^n$ とし，f は U 上連続であるとする．f は必ずしも一様連続ではないことを例を挙げて示せ．
3) $U = (-1,1) \times \cdots \times (-1,1) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i,\ x_i \in (-1,1)\}$ とし，f は U 上連続であるとする．f は必ずしも一様連続ではないことを例を挙げて示せ．

問 7.4. $P \subset \mathbb{R}^n$ を閉区間の直積，$f\colon P \to \mathbb{R}$ を可積分函数とする．$c \in \mathbb{R}^n$ とし，$P_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in P \text{ s.t. } x = y + c\}$ と置き，$f_c\colon P_c \to \mathbb{R}$ を $f_c(x) = f(x-c)$ により定めると P_c も閉区間の直積であって，f_c は P_c 上可積分であることを示せ．

問 7.5. $P \subset \mathbb{R}^n$ を閉区間の直積，$f, g\colon P \to \mathbb{R}$ を可積分函数とする．$fg(x) = f(x)g(x)$ により $fg\colon P \to \mathbb{R}$ を定めると fg は P 上可積分であることを示せ．

問 7.6. $a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b$ とし，$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ とする．f が連続であるならば f は $[a,b]$ 上可積分である（これは講義で後日示す）．$n \in \mathbb{N}$ とし，$t \in [0,1]$ について $\displaystyle\int_0^t x^n dx = \int_{[0,t]} f(x)dx$ と定める．$\displaystyle\int_0^t x^n dx = \frac{1}{n+1} t^{n+1}$ であることを定義に従って積分を直接計算することにより示せ．ただし，x^0 は x によらず 1 と看做す．

問 7.7. $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ により定める．f は $[0,1]$ 上リーマン可積分でないことを示せ．

※ f は $[0,1]$ 上ルベーグ可積分である．ルベーグ積分については伊藤清三，ルベーグ積分入門（裳華房）が詳しい入門書である．しかし，先に「集合と位相」について学んでおいた方が誤解が少ない．多少の背伸びは大切であるが，あせりすぎるのもよくない．

問 7.8. 次の不定積分を求めよ．ただし $a, b, c, d \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}^+$ とする．

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^k}$.

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+b^2)^k}$.

3) $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x^2+b^2)^k}$.

4) $\displaystyle\int \frac{cx+d}{((x-a)^2+b^2)^k}dx$.

問 7.9. f, g を多項式とし，$f \neq 0$ とする．$\displaystyle\int \frac{g(t)}{f(t)}dt$ は初等函数（指数函数，対数函数，定数，n 乗根（$n > 1$）から，有限回の四則演算と合成により得られる函数のこと．さしあたり高校までで習った函数と考えておけばよい）で表されることを示せ．

問 7.10. $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ とする．また，$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ を C^1 級の函数とする．f のグラフで与えられる曲線 l の長さについて（まったく厳密でないが）次のように考えてみる．$t \in (a,b)$ とすると $(t, f(t))$ の近く（近傍）では l はおおよそ $y = Df(t)(x-t) + f(t)$ のグラフで近似される．右辺を $g(t)$ と置く．

1) 上の文章の最後に与えられた直線のグラフに関して $(t-\delta, g(t-\delta))$ と $(t+\delta, g(t+\delta))$ の間の長さ L を求めよ．ただし，$\delta > 0$ であって，$a \leq t-\delta < t+\delta \leq b$ とする．また，区間の幅が 2δ であることを踏まえて，区間の幅当たりの長さ $L/2\delta$ を求めよ．この値を t の函数と看做して $h(t)$ と置く．

2) （さっぱりよくわからないが,）l の，$(t, f(t))$ における（$t \in [a,b]$）「無限小」dt あたりの長さは $h(t)$ であると考えて，f のグラフの $(c, f(c))$ から $(d, f(d))$（ただし $a \leq c \leq d \leq b$）の長さを $\displaystyle\int_c^d h(t)dt$ により定める．$f(x) = \sqrt{1-x^2}$，$[c,d] = [-1,1]$ のとき，f のグラフの $(c, f(c))$ から $(d, f(d))$（$a \leq c \leq d \leq b$）までの長さを求めよ．必要であれば $(d, f(d))$ と原点を通る直線と，$(c, f(c))$ と原点を通る直線のなす角を θ として用いてよい．

3) $f(x) = \sqrt{1-\alpha^2x^2}$ と置く．ここで $\alpha > 0$ である．f のグラフの $\left(-\dfrac{1}{\alpha}, 0\right)$ から $(t, f(t))$，ただし $t \in \left[-\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\alpha}\right]$，までの長さを積分で表せ．

最後の積分は楕円積分と呼ばれるものの一種で，一般には初等函数では表せないことが知られている（示すのは難しい）．

問 7.11. $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ とする．また，$l\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ を C^1 級の正則な曲線とする．すなわち，l は C^1 級であって，$\forall t \in [a,b],\ Dl(t) \neq 0$ が成り立つとする．$a \leq c \leq d \leq b$ であるとき $L(c,d) = \displaystyle\int_c^d \|Dl(t)\|\,dt$ と置く．ここで $\|\cdot\|$ は $\mathbb{R}^2$ の通常のノルムを表す．

1) ある C^1 級の函数 $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ について $l(t) = (t, f(t))$ が成り立つとする．このとき $L(c,d)$ を f やその微分などを用いて表せ．

2) $[a, b] = [0, 2\pi]$, $l(t) = (\cos t, \sin t)$ とする．$0 \leq c \leq d \leq 2\pi$ の時 $L(c, d)$ を求めよ．

3) $[a, b] = [-2, 2]$, $l(t) = (\cosh t, \sinh t)$ とする．$-2 \leq c \leq d \leq 2$ のとき $L(c, d)$ を求めよ．

ここで話を変えて，複素数の対数函数について簡単に述べる．ここでは $t, s \in \mathbb{R}$ について $e^{t+\sqrt{-1}s} = e^t(\cos s + \sqrt{-1}\sin s)$（オイラーの公式）が成り立つことを認める．さて，実数 $x > 0$ については $x = e^t$ なる唯一の実数を $\log x$ と定めた．複素数についてもまねをして，$z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ であるときに $z = e^u$ なる $u \in \mathbb{C}$ が存在するならば，それを $\log z$ としてみる．$u = t + \sqrt{-1}s$, $t, s \in \mathbb{R}$ とすると，オイラーの公式から $t = \log|z|$（この $\log$ は実数に関する対数函数である．$z \neq 0$ だからこの式で t は確かに定まる）である．$\left|\dfrac{z}{|z|}\right| = 1$ であるから，$\dfrac{z}{|z|} = \cos s + \sqrt{-1}\sin s$ と表すことができる．s には $2\pi\mathbb{Z}$ だけの任意性があるが，いずれの s についても $e^{t+\sqrt{-1}s} = z$ が成り立つ．$|z|$ を z の**絶対値**，大きさ，s を z の**偏角**とそれぞれ呼ぶ．s に $2\pi\mathbb{Z}$ だけの任意性があるという意味で，複素数について $\log z$ は**多価函数**である．しかし，次のようにすると一意に値が定まった普通の函数（**一価函数**）と考えることができる．$\mathbb{C}$ の部分集合 $U = \{z \in \mathbb{C}\,|\,z$ は 0 以下の実数ではない$\}$ を考える．$z \in U$ とすると，$\dfrac{z}{|z|}$ は -1 にはならない（他の，任意の大きさが 1 の複素数は実際に取ることがある）．従って $\dfrac{z}{|z|} = \cos s + \sqrt{-1}\sin s$ なる $s \in (-\pi, \pi)$ が唯一存在する．このようにすると $\log\colon U \to \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < s < \pi\}$ が通常の函数として定まり，**実解析的**（テーラー展開可能[1]）である．t を実部，s を虚部と看做せば $\log\colon U \to \mathbb{C}$ と考えることができる．このように複素数値函数と考えると $\log$ は**複素解析的**な函数（複素数を変数とする，テーラー展開可能な函数[2]）である．この $\log$ は $\log 1 = 0$ という特徴があり，特に Log や Ln などで表すことがある．上の定め方をよく見ると，$\log s$ の虚部を $(-\pi, \pi)$ の範囲（値域とした方がより正確である．以下では「範囲」は「値域」の意味で用いる）で定める特別な理由はなく，たとえば $(\pi, 3\pi)$ の範囲で定めてもよい．このように定めた $\log$ は $\log s = \mathrm{Log}\, s + 2\pi$ をみたす．特に $\log 1 = 2\pi$ である．このように，一価であるように（定義域と）函数を定めることを**枝を選ぶ**と呼ぶ．また，選んだ函数を**枝**あるいは**分枝**と呼ぶ．さて，この方法だと負の実数については対数が定まらない（実数に関する対数函数ではこれは仕方がないことであった．従って負の実数はここでは本質的に複素数であると考えている）．そこで今度は $V = \{z \in \mathbb{C}\,|\,z$ は 0 以上の実数ではない$\}$ として上と同様の作業をする．今度は $\log$ の虚部をたとえば $(0, 2\pi)$ の範囲とすると $\log\colon V \to \mathbb{C}$ が定まる．これも複素解析的である．また，範囲は異なるが枝である．このように定めた $\log\colon V \to \mathbb{C}$ と $\mathrm{Log}\colon U \to \mathbb{C}$ を比較してみる．意味があるのは $U \cap V = \{z \in \mathbb{C}\,|\,z \notin \mathbb{R}\}$ 上である．まず上半分 $H = \{z \in \mathbb{C}\,|\,\mathrm{Im}\, z > 0\}$ を考える．H においては $\log$ も Log も同じ方法で虚部を定めるので $\log z = \mathrm{Log} z$ が成り立つ．次に下半分 $H^- = \{z \in \mathbb{C}\,|\,\mathrm{Im}\, z < 0\}$ を考える．H^- においては $\log z$ の虚部は $(\pi, 2\pi)$ の範囲で，$\mathrm{Log}\, z$ の虚部は $(-\pi, 0)$ の範囲でそれぞれ定めるから，$\log z = \mathrm{Log}\, z + 2\pi$ が成り立つ．$\log$ の枝は様々なものを考えることができるが，いずれも同様の関係にある．

---

[1]厳密には，定義域の各点において収束半径が正であるようなテーラー級数に展開されるということである．

[2]複素解析的な函数は理想的に良く振る舞い，深い性質を持つ．

問 7.12. $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ の n 乗根 $\sqrt[n]{z}$ を指数函数と対数函数を用いて定義せよ．また，$\sqrt[n]{z}$ を函数と考えようとすると枝が n 個生じることを確かめよ．

問 7.13. $a \in \mathbb{C},\ a \neq 0,\ z \in \mathbb{C}$ とする．a^z を $a^z = \exp(z \log a)$ により定める．a^z は指数法則 $a^z a^u = a^{z+u},\ z, u \in \mathbb{C}$ をみたすことを確かめよ．また，どのような枝が生じるか考察せよ．ただし，$w \in \mathbb{C}$ について $\exp w = e^w$ とする．

問 7.14. $y = \sin x$ とする．

1) $\dfrac{dy}{dx}$ を x の函数，y の函数としてそれぞれ表せ．
2) $\sin x$ は $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上の函数としては，像への全単射であることを示せ．また，逆函数が連続であることを示せ（必要であれば前期で示した定理は用いて良い．また，実際には Arcsin は実解析的である）．この逆函数を Arcsin で表すことにする．
3) 定義により $x = \operatorname{Arcsin} y$ である．$\dfrac{d\operatorname{Arcsin} y}{dy}$ を求めよ．$y \in [0, 1)$ のとき $\operatorname{Arcsin} y$ を y の函数の積分として表せ．

問 7.15.

1) $\cos^{-1} y$ の，$[-1, 1]$ で定義された $\cos^{-1} 1 = 0$ をみたす枝を $\operatorname{Arccos} y$ で表す．$\operatorname{Arccos} y$ を上に倣って積分を用いて表せ．
2) $\tan^{-1} y$ の $\mathbb{R}$ 上定義された $\tan^{-1} 0 = 0$ をみたす枝を $\operatorname{Arctan} y$ で表す．$\operatorname{Arctan} y$ を上に倣って積分を用いて表せ．
3) $\tan^{-1} y$ の $\mathbb{R}$ 上定義された $\tan^{-1} 0 = 2\pi$ をみたす枝を考える．$\tan^{-1} y$ を積分を用いて表せ．

問 7.16. $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z \neq 0\}$ と置く．$z \in \mathbb{C}$ について $\exp z = e^z$ とし，$\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ と看做す．Log を $\operatorname{Log} 1 = 0$ をみたす対数函数の枝とする．

1) $U = \left\{ w \in \mathbb{C} \,\middle|\, |w| < \dfrac{1}{100} \right\}$ と置く（100 は本当はもっと小さな値で良いが，ここではあまり意味がない）．$V = \{z \in \mathbb{C}^* \,|\, \exists w \in U \text{ s.t. } z = \exp w\}$ と置く．Log は V 上では一価函数であることを示せ．
2) U 上の函数 f を $w \in U$ について $f(w) = \operatorname{Log}(\exp w)$ により定める．$f(w)$ をなるべく簡単に表せ．
3) $l\colon [0, 1] \to \mathbb{C}^*$ を C^∞ 級の写像であって $l(0) = 1$ なるものとする．このとき C^∞ 級の写像 $\widetilde{l}\colon [0, 1] \to \mathbb{C}$ であって，$\forall t \in [0, 1],\ \exp(\widetilde{l}(t)) = l(t)$ かつ $\widetilde{l}(0) = 0$ なるものが一意的に存在することを示せ．また，状況を図で説明せよ（これに関しては厳密でなくて良い）．

※ $\widetilde{l}$ を一価函数と看做せば，$[0,1]$ 上で $\log l$ が一価函数 $\widetilde{l}$ として定まったことになる．

4) $n \in \mathbb{Z}$ とし，$l\colon [0,1] \to \mathbb{C}^*$ を $l(t) = \exp(2\pi\sqrt{-1}nt)$ により定める．$\dfrac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\displaystyle\int_0^1 \frac{Dl(t)}{l(t)}dt$ を求めよ．また，$\widetilde{l}\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ を 3) で与えられる写像とするとき，$\widetilde{l}(1)$ を求めよ．

※) （自習用．講義の範囲からは著しく逸脱している.）

4) について，$l\colon [0,1] \to \mathbb{C}^*$ を $l(0) = l(1) = 1$ なる C^∞ 級の写像とするとき，何が成り立つか調べよ．ここで，複素数値の函数の積分は実部と虚部にわけてそれぞれ行えばよい．この問についてはたとえばアールフォルス，複素解析（現代数学社）などで複素線積分と回転数について調べると良い．

（以上）