２０１２年度数学IA演習（理I 35–39組）　第２回

’12/5/8（火）４限
’12/5/8 一部訂正
’12/5/12 再修正
’12/5/23 再々修正
’12/5/31 再々々修正

特に断らなければ $\varepsilon \in \mathbb{R},\ N \in \mathbb{N}^+$ とする．

注 2.1. 数列（など）の極限が存在することを「値が確定する」，逆に発散することを「値が確定しない」などとも言う．特に,「$\lim_{n\to+\infty} a_n$ が発散する（収束しない，存在しない，値が確定しない)」などの表現はしばしば用いられる．一方，例えば $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ が実数列であるとき，$a \in \mathbb{R}$ として,「$\lim_{n\to+\infty} a_n = a$」とする時には，右辺は a という確定している値なのだから,「左辺は有限値に確定し，それは a に等しい」という主張を含むことになる．

問 2.2. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$，$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ をそれぞれ実数列とする．また，$a,\ b \in \mathbb{R}$ が存在して $\lim_{n\to+\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to+\infty} b_n = b$ がそれぞれ成り立つとする．

1) 任意の $n \in \mathbb{N}^+$ について $a_n \le b_n$ が成り立つとする．このとき $a \le b$ が成り立つことを示せ．
2) 任意の $n \in \mathbb{N}^+$ について $a_n < b_n$ が成り立つとする．このとき $a \le b$ は常に成り立つが，$a < b$ は必ずしも成り立たないことを示せ．

定義 2.3. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ を複素数列とする．$\{a_n\}$ が $n \to +\infty$ の時に収束することを，形式的には実数列の収束と同じ条件で定める．つまり，ある複素数 a が存在し，$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0$ s.t. $n \ge N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$ が成り立つとき，$\{a_n\}$ は $n \to +\infty$ の時 a に収束すると定める．

問 2.4. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ を複素数列とする．$n \in \mathbb{N}^+$ について，$b_n = \operatorname{Re} a_n,\ c_n = \operatorname{Im} a_n$ と置く（それぞれ a_n の実部および虚部である）．$a \in \mathbb{C}$ とし，$a = b + \sqrt{-1}c$ と，実部と虚部に分けて表す．$n \to +\infty$ の時 $\{a_n\}$ が a に収束することと，$n \to +\infty$ の時 $\{b_n\}$ が b に，$\{c_n\}$ が c にそれぞれ（実数列として）収束することは同値であることを示せ．

問 2.5. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ を複素数列とし，$n \to +\infty$ の時 $\{a_n\}$ は $a \in \mathbb{C}$ に収束するとする．

1) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}}{n}$ が存在することを示し，その値を求めよ．
※ いかにも二段階に分かれている問い方であるが，今の場合には収束極限は容易に想像がつくのでその値に収束することを示してしまえば，収束することを示し，かつ収束極限も求めたことになる（なぜか？）．
2) $\{a_n\}$ は実数列であるとし，$a > 0$ とする．$x > 0$ の時，$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ で x の n 乗根（n 乗して a_n になる複素数）で正の実数であるものを表すことにする．このとき，十分大きな n について $a_n > 0$ であることを示し，また，$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ を求めよ．
3) 2) において，a を任意の複素数とし，また，b_n を a_n の任意の n 乗根とすると $\lim_{n\to\infty} b_n$ は b_n 達の選び方に依らず存在して一定の値である．このことを示せ．

※ 数列の収束に関する種々の問題については例えば解析演習（杉浦光夫著，東大出版会）などの演習書にあたること.「解析演習」に限って言えば，難しい問題も含まれているので最初のうちは略解を読んで理解できればよい．解答を無理に覚えるのは害悪が多い．そもそも大抵の場合にはすぐに忘れる．自然に覚える程度に量をこなすのが望ましい．

問 2.6. $x, y \in \mathbb{C}$ とする．$||x| - |y|| \leq |x - y|$ が成り立つことを示せ．

定義 2.7 (級数の収束（前期ではあまり扱わないが,「テーラー展開」などに用いる）).
$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ を複素数列とし，$s_n = \sum_{m=1}^{n} a_m,\ S_n = \sum_{m=1}^{n} |a_m|$ と置く．

1) 極限 $\lim_{n\to+\infty} s_n$ を**級数**と呼び，$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ で表す．また，a_n のことを級数の**第 n 項**と呼ぶ．
2) $\lim_{n\to+\infty} s_n$ が存在するとし，その値を s とする．このとき，級数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ は**収束する**と言い，$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s$ と表す．
3) $\lim_{n\to+\infty} S_n$ が存在するとき，級数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ は**絶対収束する**と言う．
4) 収束するが絶対収束しないことを**条件収束する**と言う．

級数についても「値が確定しない（極限が存在しない）」,「（$\pm\infty$ に，あるは単に）発散する」などという表現もよく用いられる（注 2.1 も参照のこと）．また，ここでは複素数に関する級数を考えているが，ベクトル空間の元に関する級数を考えることもある．

例 2.8. 実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ が $\forall n,\ a_n \geq 0$ をみたすとする．すると，$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ が収束することと，絶対収束することは同値である．このように，各項が非負の実数であるような級数を**正項級数**と呼ぶ．また，複素数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ について $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ が絶対収束することは，$|a_n|$ を第 n 項とする級数が収束することと同値である．

問 2.9. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ を複素数列とする．

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ が収束することは
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0 \text{ s.t. } m, n \geq N,\ m > n \Rightarrow |a_{n+1} + \cdots + a_m| < \varepsilon$$
が成り立つことと同値であることを示せ．
ヒント：実際の収束極限を求めるのは難しい．定義 2.7 の記号を用いるならば，級数が収束することは数列 $\{s_n\}$ が収束することと同値である．
2) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ が絶対収束するのであれば，収束することを示せ．また，このとき，$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ が成り立つことを示せ．
3) 条件収束するような級数の例を一つ挙げよ．

問 2.10. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ を複素数列とする．

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ が収束するならば，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つことを示せ．
ヒント：定義 2.7 の記号を用いる．級数が収束するならば $\{s_n\}$ はコーシー列である．
2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ は収束しないことを示せ．従って 1) の逆は正しくない．

問 2.11. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ を複素数列とする．数列の収束に関して，問 2.9 の 2) の単純な類似

$\{|a_n|\}$ が $n \to +\infty$ で収束するならば $\{a_n\}$ も $n \to +\infty$ で収束する．

は成り立たないことを示せ．

問 2.12. $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x)=x^m$ により定め，数列 $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$，$\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ を，条件

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n},\qquad s_n=\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)\frac{1}{n}$$

により定める．K を f のグラフと x-軸，直線 $x=1$ で囲まれる有界な閉領域とする（要は三角形のような図形，但し境界を含む）．また，R_i を $\mathbb{R}^2$ 上の 4 点 ${}^t\!\left(\frac{i-1}{n},0\right)$，${}^t\!\left(\frac{i}{n},0\right)$，${}^t\!\left(\frac{i-1}{n},f\left(\frac{i}{n}\right)\right)$，${}^t\!\left(\frac{i}{n},f\left(\frac{i}{n}\right)\right)$ で囲まれる長方形とする．そして $K_n=\bigcup_{i=1}^{n}R_i$ と置く．また，r_i を $\mathbb{R}^2$ 上の 4 点 ${}^t\!\left(\frac{i-1}{n},0\right)$，${}^t\!\left(\frac{i}{n},0\right)$，${}^t\!\left(\frac{i-1}{n},f\left(\frac{i-1}{n}\right)\right)$，${}^t\!\left(\frac{i}{n},f\left(\frac{i-1}{n}\right)\right)$ で囲まれる長方形とする（つぶれて線分になっている場合も許す）．そして $k_n=\bigcup_{i=1}^{n}r_i$ と置く．

1) K_n，k_n の面積はそれぞれ S_n，s_n であり，また $k_n\subset K\subset K_n$ が成り立つことを示せ．また，$n\in\mathbb{N}^+$ について $s_n\le S_n$ が成り立つことを示せ．
2) $\lim_{n\to+\infty}s_n$ および $\lim_{n\to+\infty}S_n$ が存在し，等しいことを示せ．極限値も求めること．

従って K の面積は $\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}s_n$ と定めるのが自然であると考えられる，

問 2.13. 次の極限などを求めよ（値が確定するのであればそれを求め，発散するのであればそのことを示せ）．

1) $\sup_{t\in\mathbb{Q}}\sin t$.
2) $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n+\frac{1}{n}$．これについては集積点も求めよ．
3) $\mathbb{R}^3$ 内の図形 T を

$$T=\left\{{}^t(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \exists\theta\in\mathbb{R},\ \varphi\in\mathbb{R}\ \text{ s.t. } {}^t(x,y,z)={}^t((10+\cos\varphi)\cos\theta,(10+\cos\varphi)\sin\theta,\sin\varphi)\right\}$$

により定める．

(a) T の概形を描け（座標軸とどのように交わっているかなどが分かる程度の「お絵かき」をすればよい）．
(b) $\mathbb{R}^3$ 内の点列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $a_n={}^t((10+\cos n)\cos n,(10+\cos n)\sin n,\sin n)$ により定める．$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の集積点全体の成す集合を求めよ．
(c) $\mathbb{R}^3$ 内の点列 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $b_n={}^t((10+\cos\sqrt{2}n)\cos n,(10+\cos\sqrt{2}n)\sin n,\sin\sqrt{2}n)$ により定める．$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の集積点全体の成す集合を求めよ．

ヒント：T と $[0,2\pi)\times[0,2\pi)=\{{}^t(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid u\in[0,2\pi),\ v\in[0,2\pi)\}$ の間の「地図」を作ってみよ．

定義 2.14. U を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする．$f\colon U\to\mathbb{R}^m$ が $\boldsymbol{x\in U}$ **において連続である**とは，

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0\ \text{ s.t. } y\in U,\ \|y-x\|<\delta\Rightarrow\|f(y)-f(x)\|<\varepsilon \tag{2.15}$$

が成り立つことを言う（数列の極限との類似に注意せよ．$f(x)$ が極限値の役割をしている）．f が U 上至る所連続であるとき，f は $\boldsymbol{U}$ **上連続である**という．

問 2.16. $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{Z}\,(\subset\mathbb{R})$ を連続な写像（函数）とする．f は定数であることを示せ．即ち，$\exists m\in\mathbb{Z}$ s.t. $\forall p\in\mathbb{R}^n,\ f(p)=m$ が成り立つことを示せ．また，$\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Q}\,(\subset\mathbb{R})$ で置き換えるとどうか．

定義 2.17. $U \subset \mathbb{R}^n$ とし，$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ を U から $\mathbb{R}^m$ への写像からなる列とする（このような列を写像列，函数列などと呼ぶ．並びというよりも集まりであると意識するときには写像族，函数族と呼ぶ）．

1) $\{f_n\}$ が $n \to +\infty$ の時 $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ に ***U* 上各点収束**するとは

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in U,\ \exists N > 0 \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

が成り立つことを言う（従って，点列 $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ や点 $f(x)$ にのみ着目している）．

2) $\{f_n\}$ が $n \to +\infty$ の時 $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ に ***U* 上一様収束**するとは

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0 \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow \forall x \in U,\ \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

が成り立つことを言う（従って，$x \in U$ が動くことを想定している）．

※ 特に N と x の依存関係に注意せよ．

問 2.18. 問 1.2 の函数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ は f に各点収束するが，一様収束しないことを示せ．

問 2.19. $U \subset \mathbb{R}^n$ とし，$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ を U から $\mathbb{R}^m$ への連続写像からなる列とする．$\{f_n\}$ が $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ に U 上一様収束するならば，f は連続であることを示せ．
ヒント：f が連続であることを示そうとすると，

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \|v\| < \delta \Rightarrow \|f(x+v) - f(x)\| < \varepsilon$$

が成り立つことを示すことになる．f_n は連続なことがわかっているので，（f ではなく）$\|f_n(x+v) - f_n(x)\| < \varepsilon$ にはできる．n が十分大きければ f_n は f を近似する，つまり，ある $N > 0$ が存在して $n \geq N$ ならば $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$ が成り立ち，また，ある $M > 0$ が存在して $m \geq M$ ならば $\|f_m(x+v) - f(x+v)\| < \varepsilon$ がそれぞれ成り立つ．一般には N と M は無関係なのでこれ以上話が進まないが，この問の状況では何とかなるはずである．

U から $\mathbb{R}^m$ への連続写像からなる列 $\{f_n\}$ が $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ に U 上一様収束するとする．問 2.19 により，$x \in U$ とすると $\displaystyle\lim_{\substack{y \in U \\ y \to x}} \lim_{n \to +\infty} f_n(y) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{\substack{y \in U \\ y \to x}} f_n(y)$ が成り立つ．一方，問 1.2 で見たように，この式は $\{f_n\}$ が f に一様収束しないのであれば必ずしも成り立たない．一様収束などの「一様性」はこのように極限を交換する（交換できることを保証する）時などによく用いられる．

定義 2.20. $U \subset \mathbb{R}^n$ とする．$f\colon U \to \mathbb{R}^m$ が ***U* 上一様連続**であるとは，

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ s.t. } x, y \in U,\ \|y - x\| < \delta \Rightarrow \|f(y) - f(x)\| < \varepsilon$$

が成り立つことを言う．式 (2.15) との差（２文字しかない）に注意せよ．

問 2.21. $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$ により定める．

1) f は $(-1,1)$ 上連続であることを示せ（（少なくとも）合成函数に関する結果を用いる方法と，定義をみたすことを直接示す方法がある．練習として両方とも試みよ）．
2) $-1 < a < b < 1$ とすると f は $[a,b]$ 上一様連続であることを示せ．
3) f は $(-1,1)$ 上一様連続ではないことを示せ．

（以上）