２００４年度数学 II 資料　　　　　　　　　'04/7/13（火）４時限 (14:40〜16:10)

$K=\mathbb{R}$ もしくは $K=\mathbb{C}$ とする.

訂正. 講義でも述べたように, 最初に述べた基底の変換行列は本来の変換行列の逆行列になってしまっている. 正しくは以下の通りである.

定義. V を n 次元 K-線型空間とし, $\{e_1,\dots,e_n\}$, $\{f_1,\dots,f_n\}$ を V の K 上の基底とする. このとき, 各 j について

$$(*)\qquad \begin{aligned} f_j &= p_{1j}e_1+p_{2j}e_2+\cdots+p_{nj}e_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_{ij}e_i \end{aligned}$$

となる p_{ij}, $1 \le i,j \le n$ が一意的に存在する（添え字の順序に注意）. これらの p_{ij} を並べて得られる行列

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

を基底 $\{e_1,\dots,e_n\}$ から基底 $\{f_1,\dots,f_n\}$ への変換行列と呼ぶ.

　このことを行列のように表すと次のようになる. 上の式 $(*)$ を

$$f_j=(e_1,\cdots,e_n)\begin{pmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}$$

と書き直し, 更にこれらを並べると

$$\begin{aligned}(f_1,\cdots,f_n) &= (e_1,\cdots,e_n)\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \\ &= (e_1,\cdots,e_n)\,P \end{aligned}$$

を得る．これを基底の変換行列の定義としてもよい．講義では誤って$(f_1, \cdots, f_n)Q = (e_1, \cdots, e_n)$ なる Q を基底の変換行列としてしまったので $Q = P^{-1}$ となってしまった．

定義. V を n 次元 K-線型空間とし，$\{e_1, \ldots, e_n\}$ を V の K 上の基底とする．$v \in V$ を $a_1, \cdots, a_n \in K$ を用いて

$$v = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$$

と表したとき，$a_1, \cdots, a_n$ を縦に並べて得られる K^n の元

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$$

を v の $\{e_1, \cdots, e_n\}$ に関する成分という．

定理. V を n 次元 K-線型空間とし，$\{e_1, \ldots, e_n\}$，$\{f_1, \ldots, f_n\}$ を V の K 上の基底とする．$v \in V$ について ${}^t(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ を v の $\{e_1, \ldots, e_n\}$ に関する成分とし，${}^t(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ を v の $\{f_1, \ldots, f_n\}$ に関する成分とする．P を基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ から基底 $\{f_1, \ldots, f_n\}$ への変換行列とすると

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

が成り立つ．

証明．定理の記号の下で，以下の等式が成り立つ．

$$v = (f_1, f_2, \cdots, f_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (e_1, \cdots, e_n)\, P \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

一方，$v = (e_1, \cdots, e_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ であったので，

$$(e_1, \cdots, e_n) \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} - P \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right) = 0$$

が成り立つ．ここで $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} - P \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ とおくと,

$$(e_1, \cdots, e_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0$$

であるが, これは

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_n e_n = 0$$

と同値である．$e_1, \cdots, e_n$ は一次独立であるから, $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ である．したがって

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

が成り立つ.（証明終わり）

注意. 基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ から基底 $\{f_1, \ldots, f_n\}$ への変換行列を P とすると, 上の関係は

$$(\{e_1, \ldots, e_n\} \text{ に関する成分}) = P \cdot (\{f_1, \ldots, f_n\} \text{ に関する成分})$$

となっている．したがって, P を掛けるという操作は $\{f_1, \ldots, f_n\}$ に関する成分を $\{e_1, \ldots, e_n\}$ に関する成分に変換することになり, 言葉の上では逆になっている.

問1. $V = \{$ 高々3次の t に関する $\mathbb{R}$ 係数の多項式 $\}$ とする. V の元 v_1, v_2, v_3, v_4 を

$$v_i = 1 + a_{i1}t + a_{i2}t^2 + a_{i3}t^3$$

で定めるとき, $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ が V の基底となるための a_{ij} $(1 \leq i \leq 4,\ 1 \leq j \leq 3)$ たちに関する必要十分条件を求めよ.

問2. A, B を以下のような4次行列とする.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ここで線型写像 $T_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $T_B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を

$$T_A(v) = Av,$$
$$T_B(v) = Bv.$$

で定める. ただし, 上の式において $v \in \mathbb{R}^4$ である.

$W_1 = \ker T_A$, $W_2 = \ker T_B$ とするとき, $W_1 \cap W_2$ の基底 B_0, W_1 の基底 B_1, W_2 の基底 B_2, $W_1 + W_2$ の基底 B_3, $\mathbb{R}^4$ の基底 B_4 であって,

$$\begin{array}{ccccc} B_0 & \subset & B_1 & & \\ \cap & & \cap & & \\ B_2 & \subset & B_3 & \subset & B_4 \end{array}$$

を満たすものを一組与えよ.

問3. $V = \{$ 高々3次の t に関する $\mathbb{R}$ 係数の多項式 $\}$ とし, $E = \{1, t, t^2, t^3\}$ を V の標準的な基底とする.

$$F = \{t^3,\ t^3 + t^2,\ t^3 + t^2 + t,\ t^3 + t^2 + t + 1\},$$
$$G = \{(t+1)^3,\ (t+1)^2,\ t+1,\ t\}$$

とするとき, F, G はともに V の基底であることを示せ. また, E から F, E から G, E から G に対応する基底の変換行列をそれぞれ求めよ.

問 4. K^n の元 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ に関する一次方程式系

$$(*) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

を考え, 解空間を V とする. $V \subset K^n$ である.

1) $V \neq \phi$ とする. このとき V が線型空間であることと, $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ は同値であることを示せ.

2) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ とおき, $f : K^n \to K^m$ を

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

で定める. このとき, $V = f^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}\right\}\right)$ であることを示せ.

3) $V \neq \phi$ と $f(K^n) \cap \left\{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}\right\} \neq \phi$ は同値であることを示せ.

・ 以下では $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ とする. したがって $V \neq \phi$ であって, V は線型空間である.

4) $(*)$ に更に $b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0$ という条件を付け加えた一次方程式系を考え, その解空間を W とおく. このとき, W は V の線型部分空間であることを示せ.

5) 4) において $\dim V = \dim W$ であることと

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V,\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0$$

が成り立つことは同値であることを示せ.

・5) が成り立つような $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ の組を行ベクトルとみなし, このような行ベクトル全体の集合を U で表す. K^n を行ベクトル全体のなす線型空間とみなせば $U \subset K^n$ である,

6) 上のように $U \subset K^n$ とみなしたとき, U は K^n の K-線型部分空間であることを示せ.

ヒント：例えば $(b_1 + b'_1, b_2 + b'_2, \cdots, b_n + b'_n) \in U$ とはどのような意味であるのか考えてみよ.

7) 行ベクトル $e_1, e_2, \cdots, e_m$ を $e_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \in K^n$ で定める. このとき U は $e_1, e_2, \cdots e_m$ で生成されることを以下のように示せ.

7-1) $e_1, e_2, \cdots, e_m$ で生成される K^n の部分空間を U' とおくと $U' \subset U$ であることを示せ.

7-2) $U \supsetneq U'$ であったとして, $u \in U \setminus U'$ とする. つまり $u \in U$ であって $u \notin U'$ であるとする. A の下に更に u を並べた行列を $A' = \begin{pmatrix} A \\ \hline u \end{pmatrix}$ とおくと, $\operatorname{rank} A' = \operatorname{rank} A + 1$ であることを示せ.

7-3) 引き続き $U \supsetneq U'$ であるとする. このとき, $\dim\{v \in K^n \mid Av = 0\} = n - \operatorname{rank} A$ である（これは認めてよい）が, 一方 $\{v \in K^n \mid Av = 0\} = \{v \in K^n \mid A'v = 0\}$ であることを示し, 矛盾を導け（括弧の中の K^n はいつもどおり列ベクトルの全体とみなしている）.

ヒント：そもそも $u \in U$ とは何を意味していたのか考えてみよ.

8) 7) の結果を用いて $\dim U = \operatorname{rank} A$ を示せ.