FBSDES の解とニュートン法について

土屋貴裕 （会津大学），田口大 （大阪大学)

Forward-backward stochastic differential equations (FBSDEs)

$$
\begin{cases} X(t) &= X(0) + \int_0^t b\Big(s,\omega,\Theta(s)\Big)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma\Big(s,\omega,\Theta(s)\Big)\,\mathrm{d}W(s), \\ Y(t) &= \varphi\left(X(T)\right) + \int_t^T f\Big(s,\omega,\Theta(s)\Big)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z(s)\,\mathrm{d}W(s), \end{cases} \tag{1}
$$

を満たす三組 $\Theta \equiv (X,Y,Z) \equiv (X(t),Y(t),Z(t))_{t\in[0,T]}$ は $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}$ に値を取るとする．W は d-次元の Wiener 過程，b, f, σ, そして φ は可測な関数であり，一般にランダムであっても良い．この FBSDEs (1) はいわゆる終端条件 $Y(T) = \varphi\left(X(T)\right)$ があるため Stochastic differential equations (SDEs) とはかなり様相が異なる．その解の存在と一意性について次のようなアプローチがある, 例えば [8] や [4] を参考にすると

Contraction mapping: 局所的，すなわち小さい $T > 0$ でのみで解が構築できる.
The Four Step scheme: 大域的であるがマルコフ型のみ有効.
The method of continuation: マルコフ型を過程しないが “monotonicity”条件がいる.

本講演では (X,Y,Z) を近似列 (X_n,Y_n,Z_n) を Newton 法のアナロジーで構成する: φ, b, f, σ に適当な滑らかさを仮定して，

$$
\begin{aligned} X_{n+1}(t) &= X_{n+1}(0) + \int_0^t b_n\Big(s,\omega,\Theta_{n+1}(s)\Big)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma_n\Big(s,\omega,\Theta_{n+1}(s)\Big)\,\mathrm{d}W(s), \\ Y_{n+1}(t) &= \varphi_n(X_{n+1}(T)) + \int_t^T f_n\Big(s,\omega,\Theta_{n+1}(s)\Big)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_{n+1}(s)\,\mathrm{d}W(s). \end{aligned} \tag{2}
$$

ここで，$\varphi_n(x) = \varphi(X_n(T)) + \nabla_x\varphi(X_n(T))(x - X_n(T))$, $x \in \mathbb{R}^l$ であり，係数 b_n, σ_n, f_n は (1) の状態変数 $\theta = (x,y,z) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times d}$ に関して 1 次近似したものとする：

$$
b_n\Big(s,\omega,\theta\Big) = b\Big(s,\omega,\Theta_n(s)\Big) + \nabla_\theta b\Big(s,\omega,\Theta_n(s)\Big)(\theta - \Theta_n(s)), \quad (s,\omega,\theta) \in [0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times d},
$$

同様に σ_n, f_n も定義する．

すると線形な係数 b_n, σ_n, f_n であるから三組 $\Theta_n \equiv (X_n,Y_n,Z_n) \equiv (X_n(t),Y_n(t),Z_n(t))_{t\in[0,T]}$ を定義できそうに思えるが，一般に well-defined でない．それどころか FBSDEs (1) は係数が線形かつ有界，さらに一次元であっても大域的には解の一意性が崩れ，しかも上記の既存の方法のいずれも適応できない，[4].

そこで論文 [6] では特に X（の拡散係数）は (Y,Z) に関係しない decoupled FBSDEs,

$$
\begin{cases} X(t) &= X(0) + \int_0^t b(s,X(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s,X(s))\,\mathrm{d}W(s), \\ Y(t) &= \varphi\left(X(T)\right) + \int_t^T f(s,X(s),Y(s),Z(s))\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z(s)\,\mathrm{d}W(s). \end{cases} \tag{3}
$$

のときに次を示した．

Theorem 1 ([6]). b, σ, f, φ は微分可能，微分係数は (s,ω)-*a.e.* で一様に有界，さらに

$$
\mathbb{E}\left(|X(0)|^2 + \int_0^T \Big|b\Big(s,\omega,0\Big)\Big|^2 + \Big|\sigma\Big(s,\omega,0\Big)\Big|^2 + \Big|f\Big(s,\omega,0,0,0\Big)\Big|^2\,\mathrm{d}s\right) < \infty,
$$

とする．このとき，*decoupled FBSDEs* (3) の解が存在し，T と係数 b, σ, f の微分で定まる定数 $C > 0$ が存在する：$X_0(0) = X(0)$ を満たす任意の初期値 $(X_0, Y_0, Z_0) \in \mathbb{S}^2_l \times \mathbb{S}^2_m \times \mathbb{H}^2$ に対して

$$\|(X - X_{n+1}, Y - Y_{n+1}, Z - Z_{n+1})\| \leq C 2^{-n}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

通常のニュートン近似の収束は有限次元であっても関数の凸性 [5, page 453]，もしくは初期値を解に十分に近く取る条件を仮定する [2, Theorem **XVI**]．実際に Vidossich は（応用分野で常微分方程式の解の効率的な近似方法として用いられていた）Chaplygin 近似は無限次元 Banach 空間のニュートン法であることを見抜き，その大域的な収束を [7, Theorem (1.3)] で与えた．さらに SDEs においてニュートン法の収束が [3] で示された．ただし，それらは（局所的な一次もしくは単に）収束は示しているが大域的に一次収束することまでは得られていなかった．

本研究の貢献は decoupled FBSDEs におけるニュートン法の大域的な一次収束である．鍵となるとは Forward X については天野氏 [1] による Gronwall 不等式型の評価であり，Backward (Y, Z) については重み付きノルムを考えることにある．ここで必要な表記について一部，記載する．終端時間を $T > 0$ とする．$m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathbb{S}^2_m = \left\{ Y : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^m \text{ continuous, adapted} : \|Y\|_{\mathbb{S}^2_m} = \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq s \leq T} |Y(s)|^2\right] < \infty \right\},$$

$$\mathbb{H}^2 = \left\{ Z : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d \text{ adapted} : \|Z\|_{\mathbb{H}^2} = \mathbb{E}\left[\int_0^T |Z(s)|^2 \, \mathrm{d}s\right] < \infty \right\},$$

各々の Banach 空間 $\mathbb{S}^2_m \times \mathbb{H}^2$，$\mathbb{S}^2_l$ は

$$\|(Y, Z)\|^2 = \|Y\|^2_{\mathbb{S}^2_m} + \|Z\|^2_{\mathbb{H}^2}, \quad \|X\|^2 = \|X\|^2_{\mathbb{S}^2_l}.$$

また $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し, 重み付きノルムは

$$\|(Y, Z)\|^2_\alpha = \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq s \leq T} e^{\alpha s} |Y(s)|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s} |Z(s)|^2 \, \mathrm{d}s\right].$$

さらに Kantorovitch 定理を援用することで十分大きい $n \in \mathbb{N}$ では二次収束することを述べる．また論文 [6] では証明はできたものの，凸性を仮定していない（ように見えた）が大域的な収束が導かれるのか不鮮明であった．本講演ではその点をできる限り整理して解説する．

References

1. Kazuo Amano, *A note on Newton's method for stochastic differential equations and its error estimate.*, Proc. Japan Acad., Ser. A **85** (2009), no. 3, 19–21.
2. L Kantorovitch, *The method of successive approximations for functional equations*, Acta Math. **71** (1939), 63–97.
3. Shigetoku Kawabata and Toshio Yamada, *On Newton's method for stochastic differential equations*, Séminaire de probabilités de Strasbourg, Lecture Notes in Math., vol. 1485, Springer, Berlin, 1991, pp. 121–137.
4. Jin Ma, Zhen Wu, Detao Zhang, and Jianfeng Zhang, *On well-posedness of forward-backward SDEs – a unified approach.*, Ann. Appl. Probab. **25** (2015), no. 4, 2168–2214.
5. J M Ortega and W C Rheinboldt, *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*, Classics in Applied Mathematics, vol. 30, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2000.
6. Dai Taguchi and Takahiro Tsuchiya, *Newton-Kantorovitch method for decoupled forward-backward stochastic differential equations*, (2018).
7. Giovanni Vidossich, *Chaplygin's method is Newton's method*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **66** (1978), no. 1, 188–206.
8. Jianfeng Zhang, *Backward stochastic differential equations. From linear to fully nonlinear theory.*, New York, NY: Springer, 2017.

このファイルは QR コードを読む込事で利用できます．