Fluctuation results in First-passage percolation

中島秀太 [*] 京都大学 数理解析研究所　博士後期課程 3 年

キーワード：First-passage percolation, optimization problem, random environment

First-passage percolation は Hammersley と Welsh により 1965 年に導入された動的な浸透モデルである。モデルは次のように定義される。隣接している $\mathbb{Z}^d$ の二点をつなぐ辺の全体を $E(\mathbb{Z}^d)$ で表す。各辺 $e \in E(\mathbb{Z}^d)$ には、その辺を通過するのに必要な時間を表す独立で同一分布に従う非負確率変数 τ_e が与えられているとする。また、$\mathbb{Z}^d$ の辺を $e_1 \to \cdots \to e_k$ の順にたどる路 π の移動時間を $t(\pi) = \sum_{i=1}^k \tau_{e_i}$ で定義する。さらに二点 $x, y \in \mathbb{Z}^d$ 間の最小移動時間を次で定義する:

$$T(x,y) := \inf\{t(\pi) : \ \pi \text{は} x \text{から} y \text{への路}\}.$$

物理的には τ_e は e の浸透に要する時間、$T(0,x)$ は液体の浸透領域が x に到達するまでの時間、$B(t) = \{x \in \mathbb{R}^d | T(0,[x]) \le t\}$ は時刻 t での浸透領域を表す。

本講演では浸透領域 $B(t)$ の揺らぎの大きさについて議論する。

Definition 1. 次を満たす時、τ の分布が適切であると言う*:*

$$\mathbb{P}(\tau_e = \underline{\tau}) < \begin{cases} p_c(d) & \textit{if } \underline{\tau} = 0, \\ \vec{p}_c(d) & \textit{otherwise}, \end{cases}$$

ここで $\underline{\tau}$ は τ_e の分布の *support* の下限、$p_c(d), \vec{p}_c(d)$ はそれぞれ d 次元 *percolation* モデル、d 次元 *oriented percolation* モデルの臨界確率である。

次に浸透領域 $B(t)$ の揺らぎの大きさを定義する。

Definition 2. 任意の $l > 0$ と任意の集合 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ について、

$$\Gamma_l^- = \{v \in \Gamma | \ d(v, \Gamma^c) \ge l\} \ \textit{and} \ \Gamma_l^+ = \{v \in \mathbb{R}^d | \ d(v, \Gamma) \le l\},$$

と定める。ここで d はユークリッド距離。与えられた集合 $A, B \subset \mathbb{R}^d$ に対して、B に対する A の揺らぎの大きさを次で定義する*:*

$$F(A,B) = \inf\{\delta > 0 | \ B_\delta^- \subset A \subset B_\delta^+\}.$$

Theorem 1. F が適切で指数モーメント有限であるとする。このときある $c, C > 0$ が存在して任意の $t > 0$ と任意の原点を含む凸集合 $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ について、次が成り立つ。

$$\mathbb{P}(F(B(t), \Gamma) \le c \log t) \le C \exp(-t^c).$$

本講演では研究の背景や動機を説明するとともに、証明で用いるアイデアについても議論する予定である。

参考文献

[1] Shuta Nakajima Divergence of shape fluctuation for general distributions in first passage percolation arXiv:1706.03493.

[*] `njima@kurims.kyoto-u.ac.jp`