正則基底に関してOgawa可積分な乱関数のSFCによる同定

星野　浄生　(大阪府立大学)*

1.　序

乱関数が確率Fourier係数(SFC)で同定されるか, という問題が論じられてきた. 特にSFCがOgawa積分で与えられた場合において, [5], [1], [6]で先行結果がある. [5], [1]では, 有界変動乱関数の重複対数の法則を用いたSFCからの再構成, [6]では, 適当な複素数値乱関数のcross variationを用いた再構成が示されている. 本講演では, 正則CONSに関してOgawa可積分な乱関数のcross variationを用いた再構成を与える.

2.　設定

$(B_t)_{t\in[0,1]}$をfilter付確率空間$(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]},P)$上のBrown運動, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$を$L^2([0,1]\,;\mathbb{C})$のCONSで各e_nの実部, 虚部は有界変動であるとする. $L^2([0,1]\,;\mathbb{R})$のCONS $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$は, $\sup_{M\in\mathbb{N}}\Big|\sum_{m=1}^{M}\varphi_m\int_0^{\cdot}\varphi_m(s)\,ds\Big|_{L^2[0,1]}<\infty$を満たすとき正則であるという. $L^2([0,1]\,;\mathbb{R})$の正則CONSに関するOgawa積分(正則Ogawa積分), Itô積分, 可微分指数rのi-parameter 2乗可積分Wiener汎関数のSobolev空間, Skorokhod積分をそれぞれ$\int_0^1 d_*B$, $\int_0^1 dB$, $\mathcal{L}_i^{r,2}$, $\int_0^1\delta B$と表す([2]のDefinition 2.1,2.3,2.4を参照). $X,Y:[0,1]\to L^0(\Omega)$のtでのcross variationが存在するとき, それを$\langle X,Y\rangle_t$と表し, quadratic variation $\langle X,X\rangle_t$が存在するとき, それを$[X]_t$と表す.

$a\in L^0([0,1]\times\Omega\,;\mathbb{C}), b\in L^0(\Omega\,;L^2([0,1]\,;\mathbb{C}))$に対して以下を定義する.

定義 1 (正則Ogawa型SFC) 各$n\in\mathbb{N}$に対し, $\overline{e_n}a$は正則Ogawa積分可能であるとする. 正則Ogawa型確率微分$d_*Y_t=a(t)\,d_*B_t+b(t)\,dt$, $t\in[0,1]$の$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$に関する確率Fourier係数(正則Ogawa型SFC, 或いは, SFC-O$_*$) (e_n,d_*Y)を次式で定義する:

$$(e_n,d_*Y):=\int_0^1\overline{e_n(t)}\,d_*Y_t=\int_0^1\overline{e_n(t)}a(t)\,d_*B_t+\int_0^1\overline{e_n(t)}b(t)\,dt.$$

特に, $b=0$のとき, $(e_n,d_*Y)=(e_n,a\,d_*B)$を$a(t)$のSFC-O$_*$ともいう.

3.　乱関数の正則Ogawa型SFCによる再構成

まず, 以下の乱関数の族($L^0([0,1]\times\Omega)$の部分集合)を定義する:

$$\mathcal{A}=\{A\in L^0([0,1]\times\Omega)\,|\,\mathrm{Re}\,A,\mathrm{Im}\,A\ \text{は 有界変動 a.s.}\},$$
$$\mathcal{M}=\Big\{\int_0^{\cdot}f\,dB\,\Big|\,f\in L^0(\Omega\,;L^2[0,1]),f\ \text{は}\ (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}\text{-発展的可測}\Big\},$$
$$\mathcal{W}=\Big\{\int_0^{\cdot}f\,\delta B\,\Big|\,f\in\mathcal{L}_1^{2,2}\Big\}+\mathrm{span}\Big\{T_Kf\,\Big|\,f\in\mathcal{L}_1^{1,2},\sup_{t\in[0,1]}|K(t,\cdot)|_{L^2[0,1]}<\infty\Big\},$$

但し, $f\in\mathcal{L}_1^{1,2}$, $K\in L^2([0,1]^2)$に対し, $T_Kf(t):=\int_0^1K(t,s)f(s)\,ds$. また, $\mathcal{A},\mathcal{W}$の元は非因果的であることに注意する. $\mathscr{L}=\mathcal{A}+\mathcal{M}+\mathcal{W}$とおく.

---

*e-mail: `su301032@edu.osakafu-u.ac.jp`

命題 1 $a \in \mathscr{L}$ とするとき, 以下が成り立つ:

(1) 任意の有界変動関数 $v : [0,1] \to \mathbb{R}$ に対し, va は正則 Ogawa 積分可能である.

(2) 0 に L^2-収束する任意の有界変動関数列 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し, $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.p.}} \int_0^1 v_n a \, d_\varphi B = 0$. 特に,
$$\mathcal{P}((e_n, d_*Y))_{n\in\mathbb{N}}(t) := \underset{N\to\infty}{\text{l.i.p.}} \sum_{n=1}^{N} \int_0^t e_n(s)\, ds \, (e_n, d_*Y) = Y_t, \ \forall t \in [0,1],$$
ここで, $d_*Y_t = a(t)\, d_*B_t + b(t)\, dt$, $t \in [0,1]$.

次に, $\mathcal{P}$ と cross variation $\langle\, ,\, \rangle_t$ により SFC-O$_*$ で同定される乱関数の全体として $\mathscr{L}_{\mathrm{PC}}^{e,*}$ を次で定める:

$$\mathscr{L}_{\mathrm{PC}}^{e,*} = \Big\{ a \in L^0([0,1]\times\Omega) \,\Big|\, \mathcal{P}((e_n, a\, d_*B))_{n\in\mathbb{N}} = \int_0^{\cdot} a\, d_*B,$$
$$\forall s,t \in [0,1] \ \Big[\int_0^{\cdot} a\, d_*B \Big]_t = \int_0^t |a(u)|^2\, du, \ \Big\langle \int_0^{\cdot} a\, d_*B, \ B_{\cdot\wedge s} \Big\rangle_t = \int_0^{t\wedge s} a(u)\, du \Big\}.$$

命題 2 $\mathcal{A}, \mathcal{M}, \mathcal{W} \subset \mathscr{L}_{\mathrm{PC}}^{e,*}$.

定理 1 $\mathscr{L}_{\mathrm{PC}}^{e,*}$ は線形空間となる.

系 1 $a(t)$ は $\mathrm{Re}\ a, \mathrm{Im}\ a \in \mathscr{L}_{\mathrm{PC}}^{e,*}$ を満たすとする. このとき, $d_*Y_t = a(t)\, d_*B_t + b(t)\, dt$, $t \in [0,1]$ とすると以下が成り立つ:

(1) $a(t)$ は $((e_n, d_*Y))_{n\in\mathbb{N}}$ で $a(t) = \frac{d}{dt}\big\langle \mathcal{P}((e_n, d_*Y))_{n\in\mathbb{N}}, B \big\rangle_t$ により同定される.

(2) $|\mathrm{Re}\ a|$, $|\mathrm{Im}\ a|$, $\mathrm{Re}\ a \,\mathrm{Im}\ a$, $(\mathrm{sgn}\, a)a^\dagger$ は $((e_n, d_*Y))_{n\in\mathbb{N}}$ で $Y_t = \mathcal{P}((e_n, d_*Y))_{n\in\mathbb{N}}$ と性質: $\forall f, g \in \mathscr{L}_{\mathrm{PC}}^{e,*}$ $\int_0^t f(s)\overline{g(s)}\, ds = \big\langle \int_0^{\cdot} f\, d_*B, \int_0^{\cdot} g\, d_*B \big\rangle_t$ により同定される.

注 1) (2) における同定には $(B_t)_{t\in[0,1]}$ を必要としない.
注 2) $((e_n, d_*Y))_{n\in\mathbb{N}}$ から有限個の SFC (e_n, d_*Y) が欠落していても (1),(2) は成り立つ.
注 3) $a(t)$ が同定されるので b も $((e_n, d_*Y))_{n\in\mathbb{N}}$ で同定される.
注 4) $a \in \mathscr{L}$ であれば, $a(t)$ は系 1 の仮定を満たす.

参考文献

[1] K. Hoshino, Identification of finite variation processes from the SFC. MSJ Autumn Meeting, abstract (2017)

[2] K. Hoshino, T. Kazumi, On the Ogawa integrability of noncausal Wiener functionals, to appear, Stochastics (2018)

[3] D. Nualart, E. Pardoux, Stochastic calculus with anticipating integrands. Probab. Th. Rel. Fields , 78, pp.535-581 (1988)

[4] S. Ogawa, The stochastic integral of noncausal type as an extension of the symmetric integrals. Japan J. Appl. Math. **2**, 229-240 (1985)

[5] S. Ogawa, H. Uemura, On the identification of noncausal functions from the SFCs. RIMS Kôkyûroku. **1952**, 128-134 (2015-06)

[6] S. Ogawa, H. Uemura, On the reconstruction of random function from its SFCs defined by an arbitrary CONS. Symposium on Probability Theory, abstract (2017)

---

† $\mathrm{sgn}\, z = 1$ if $0 \le \arg z < \pi$, $\mathrm{sgn}\, z = -1$ o/w, $z \in \mathbb{C}$ ($\arg 0 := 0$).