Geometry of the random walk range conditioned on survival among Bernoulli obstacles

福島　竜輝[1]
京都大学数理解析研究所

Jian Ding (University of Pennsylvania), Rongfeng Sun (National University of Singapore), Changji Xu (University of Chicago) との共同研究

格子 $\mathbb{Z}^d$ 上に Bernoulli 分布する障害物を避けながらランダムウォークする粒子を考える．粒子と媒質の両方について平均をとると (annealed という[2]) 粒子は出発点を含む球状の領域に局在することが知られている．本研究ではこの粒子の軌跡が局在している球を埋め尽くすことを示し，さらに軌跡の境界の大きさに関する評価を得たので報告する．

$(\omega, \mathbb{P}_p)$ を $\mathbb{Z}^d$ 上の独立同分布 Bernoulli$(1-p)$ 確率変数，$(\{S_n\}_{n\ge 0}, P_0)$ を原点を出発点とする d 次元ランダムウォークとする．$\omega = (\omega_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ に対して *obstacles* を $\mathcal{O}(\omega) := \{x \in \mathbb{Z}^d\colon \omega_x = 1\}$ で定め，ランダムウォークの到達時刻を $\tau_{\mathcal{O}}$ と書くことにする．粒子の挙動を記述するのは条件付き確率

$$\mu_N(\,\cdot\,) := \mathbb{P}_p \otimes P_0(\,\cdot \mid \tau_{\mathcal{O}(\omega)} > N)$$

であり，*annealed path measure* と呼ばれる．

以下 $d \ge 2$ とする．次が冒頭に述べた局在現象である．

Confinement property. (Sznitman [6], Bolthausen [2] for $d = 2$, Povel [5] for $d \ge 3$) $d \ge 2$, $p \in (0, 1)$ に対して $\varrho_0(d, p) > 0$，$x_N(\omega) \in \mathbb{Z}^d$ が存在して，任意の $\epsilon > 0$ に対して次が成り立つ：

$$\mu_N\left(S_{[0,N]} \subset B(x_N(\omega), (\varrho_0 + \epsilon)N^{\frac{1}{d+2}})\right) \to 1, \quad N \to \infty. \qquad \text{(confinement)}$$

講演者は [4] において $S_{[0,N]}$ が $B(\omega)$ をほとんど埋め尽くしていることを示した：

$$\forall \epsilon > 0, \quad \mu_N\left(\left|N^{-\frac{d}{d+2}}|S_{[0,N]}| - |B(0, \varrho_0)|\right| > \epsilon\right) \to 0, \quad N \to \infty.$$

今回報告する一つ目の結果は，「ほとんど」を「境界の近くを除いて全て」に改善するものである．これは [2] で予想として述べられていたものである．

Theorem 1. *Confinement property* と同じ x_N と任意の $\epsilon > 0$ に対して，

$$\mu_N\left(S_{[0,N]} \supset B(x_N(\omega), (\varrho_0 - \epsilon)N^{\frac{1}{d+2}})\right) \to 1, \quad N \to \infty. \qquad \text{(covering)}$$

Remark. この定理に関しては最近 Berestycki–Cerf [1] が同じ結果を発表した．ただしそこでの問題の定式化は障害物を使わないもので，従って証明の方法も異なっている．例えば我々の議論は (confinement) を (おそらく必要ないものの現時点では) 仮定しているが，彼らは (covering) を独立に示す．実は Bolthausen の論文 [2] は，(covering) から (confinement) を導く構成になっており，[1] はその方針を $d \ge 3$ でも完遂しようとしている．

[1] E-mail:ryoki@kurims.kyoto-u.ac.jp

[2] これに対して媒質は固定した場合を quenched という．

上の (confinement) と (covering) によりランダムウォークの軌跡は漸近的に（中身の詰まった）球であることが分かる．二つ目の結果は軌跡の表面積が $\log N$ の冪の因子を除いて $B(x_N(\omega), \varrho_0 N^{\frac{1}{d+2}})$ の表面積と一致することを示すものである．

Theorem 2. ある $a > 0$ が存在して

$$\mu_N \left(|\partial S_{[0,N]}| \le N^{\frac{d-1}{d+2}} (\log N)^a \right) \to 1, \quad N \to \infty.$$

界面の揺らぎの問題として見るならば，表面積より $\partial S_{[0,N]}$ と $\partial B(x_N(\omega), \varrho_0 N^{\frac{1}{d+2}})$ の Hausdorff 距離などを考察する方が自然であるが，それははるかに難しい問題のように思われる．

最後に技術的な側面について少し言及しておく．このモデルの研究は 1990 年代に Sznitman が「障害物の拡大」と呼ばれる多重スケール解析によってランダム作用素の固有値を評価する方法でかなり進展させた．この方法は実際の適用に際して確率論的な考察を伴うことが多いものの，原理的には解析的なものである．一方で今回の結果を導くために用いた手法はその本質において組合せ論的であり，この種の問題の研究としては目新しいところがあると思われるので，講演ではできるだけそこに焦点を当てたい．

References

[1] N. Berestycki and R. Cerf. The random walk penalised by its range in dimensions $d \ge 3$. arXiv:1811.04700.

[2] E. Bolthausen. Localization of a two-dimensional random walk with an attractive path interaction. *Ann. Probab.* 22, 875–918, 1994.

[3] J. Ding, R. Fukushima, R. Sun and C. Xu. Geometry of the random walk range conditioned on survival among Bernoulli obstacles. arXiv:1806.08319

[4] R. Fukushima. Asymptotics for the Wiener sausage among Poissonian obstacles. *J. Stat. Phys.* 133, 639–657, 2008.

[5] T. Povel. Confinement of Brownian motion among Poissonian obstacles in $\mathbb{R}^d, d \ge 3$. *Probab. Theory Related Fields* 114, 177–205, 1999.

[6] A.-S. Sznitman. On the confinement property of two-dimensional Brownian motion among Poissonian obstacles. *Comm. Pure Appl. Math.* 44, 1137–1170, 1991.