定常過程に対する MA ブートストラップ

藤本 智博 (広島大学)
井上 昭彦 (広島大学)
清水 亮 (オリックス生命)

$a \in \mathbb{R}^{q\times q}$ に対し，$\|a\| := \sup_{u\in\mathbb{R}^q, |u|=1} |au|$ をそのスペクトル・ノルムとする．$q \in \mathbb{N}$ とする．平均 $\mu_X \in \mathbb{R}^q$ を持つ $\mathbb{R}^q$-値の定常過程 $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ はMA (∞) 表現

$$X_k - \mu_X = \sum_{j=-\infty}^{k} \psi_{k-j}\epsilon_j, \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

により記述されるとする．ここで $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ は $\mathbb{R}^{q\times q}$-値の列で，次を満たすとする：(A1) $\psi_0 = I_q$, (A2) $\sum_{j=0}^{\infty} j\|\psi_j\| < \infty$, (A3) $\Psi(z) := \sum_{j=0}^{\infty} z^j\psi_j$ は $\det\Psi(z) \neq 0$ $(z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1)$ を満たす．また，次も仮定する：

(A4) $\{\epsilon_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は $\mathbb{R}^q$-値の IID 確率ベクトル列で，$E[\|\epsilon_0\|^4] < \infty$, $E[\epsilon_0] = 0$ および $E[\epsilon_0\epsilon_0^{\mathrm{T}}] > 0$ を満たす.

$X_1, \ldots, X_n$ を $\{X_t\}$ からの標本とする. 経験自己共分散関数 $\{\widehat{\gamma}(j)\}$ を次の様に定義する：

$$\widehat{\gamma}(j) := \begin{cases} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-j}(X_{k+j} - \bar{X}_n)(X_k - \bar{X}_n)^{\mathrm{T}}, & j = 0, 1, \ldots, n-1, \\ \frac{1}{n}\sum_{k=-j+1}^{n}(X_{k+j} - \bar{X}_n)(X_k - \bar{X}_n)^{\mathrm{T}}, & j = -n+1, \ldots, -1. \end{cases}$$

ここで $\bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ は標本平均を表す.

我々の MA ブートストラップは，次の 2 つのステップよりなる.

Step 1. このステップでは，標本のサイズ n が増加するにつれて増加する 次数 $p(n)$ の MA (移動平均) 過程を $\{X_n\}$ にフィットさせて，ノイズの経験分布を求める.

$1 \ll n$ に対し, $(\widehat{\phi}_{1,n}, \widehat{\phi}_{2,n}, \ldots, \widehat{\phi}_{n,n})$ を次の経験 Yule–Walker 方程式の解とする：

$$\sum_{j=1}^{n} \widehat{\phi}_{j,n}\widehat{\gamma}(i-j) = \widehat{\gamma}(i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

我々は $p(n)$ を，$p(n) \to \infty$ $(n \to \infty)$ および $p(n) = o(n)$ $(n \to \infty)$ が成り立つようにとる. 以下，簡単のため，$p(n)$ を p と書く．次のようにおく：

$$\widehat{\psi}_{k,p} := \widehat{v}_{k,p}\widehat{v}_{0,p}^{-1}, \qquad k = 0, \ldots, p, \tag{2}$$

$$\widehat{v}_{k,p} := \widehat{\gamma}(k) - \sum_{j=1}^{p} \widehat{\gamma}(k+j)\widehat{\phi}_{j,p}^{\mathrm{T}}, \qquad k = 0, \ldots, p. \tag{3}$$

まず，$\epsilon_k = 0$ $(k = 0, \ldots, p-1)$ とし，

$$\epsilon_k = X_k - \bar{X}_n - \sum_{l=1}^{p} \widehat{\psi}_{l,p}\epsilon_{k-l}$$

から ϵ_k $(k = p+1, \ldots, n)$ を求め，

$$\widehat{\epsilon}_{k,p} = \epsilon_k, \qquad k = p+1, \ldots, n$$

を定める。次に

$$\tilde{\epsilon}_{k,p} := \widehat{\epsilon}_{k,p} - \frac{1}{n-p} \sum_{j=p+1}^{n} \widehat{\epsilon}_{j,p}, \qquad k = p+1, \ldots, n$$

と中心化し，$\{\tilde{\epsilon}_{k,p}\}_{k=p+1}^{n}$ の経験分布 $\frac{1}{n-p}\sum_{t=p+1}^{n} \delta_{\tilde{\epsilon}_{t,n}}$ の分布関数を $\widehat{F}_{\epsilon,p}$ と表す．

Step 2. このステップでは，$\{X_t\}$ の MA (移動平均) 近似を用いて標本 $X_1, \ldots, X_n$ のリサンプリング $\{X_t^*\}$ を構成する．

$\{\tilde{\epsilon}_{t,n}\}$ のリサンプリング$\{\epsilon_t^*\}_{t\in\mathbb{Z}}$ を

$\{\epsilon_t^*\}$ は IID でかつ各 ϵ_t^* の分布は $\widehat{F}_{\epsilon,n}$ に従う

ように取る．観測データ $X_1, \ldots, X_n$ のリサンプリング $\{X_t^*\}_{t\in\mathbb{Z}}$ を，次の**近似移動平均表現**に従い構成する：

$$X_t^* = \bar{X}_n + \sum_{j=0}^{p} \widehat{\psi}_{j,p} \epsilon_{t-j}^* \qquad (t \in \mathbb{Z}). \tag{4}$$

上の MA ブートストラップの構成は，標本 $X_1, \ldots, X_n$ による条件付確率 P^* を導く．我々は, P^* に関する量を * をつけて書く．

次のようにおく： $\widehat{\psi}_{k,p} := 0, \quad k \geq p+1$．次は [1, Lemma 5.1] の類似物である．

Lemma 1. (A1)–(A4) および $p(n) = O((n/\log n)^{1/4})$ $(n \to \infty)$ を仮定する. すると次を満たす確率変数 n_1 が存在する：

$$\sup_{n \geq n_1} \sum_{j=0}^{\infty} j \|\widehat{\psi}_{j,p}\| < \infty \quad \text{almost surely.}$$

次の補題は [1, Lemma 5.2] の類似物である．

Lemma 2. (A1)–(A4) および $p(n) = O((n/\log n)^{1/2})$ $(n \to \infty)$ を仮定する. すると，次が成り立つ：

$$\sup_{0 \leq j < \infty} \|\widehat{\psi}_{j,p} - \psi_j\| = o(1) \quad (n \to \infty) \quad \text{almost surely.}$$

これらのことから，上の MA ブートストラップに対しては，[1] の AR ブートストラップの諸結果 (の多次元版) と同様のことが成り立つ．例えば，次は [1, Lemma 5.5] の類似物である．

Theorem 3. (A1)–(A4) および $p(n) = O((n/\log n)^{1/4})$ $(n \to \infty)$ を仮定する. すると次が成り立つ：

$$X_k^* \xrightarrow{d^*} X_k \quad \text{in prob.}$$

講演では，シミュレーション結果についても紹介する予定である．

参考文献

[1] Bühlmann, P. (1997). Sieve bootstrap for time series. *Bernoulli* **3** 123–148.