

Excursion theory とその応用

矢野孝次 (京大理)*

Excursion theory は Itô [16] に始まり現在に至るまで様々な発展を遂げている. ここでは, 筆者の興味の範囲に限定してではあるが, 最近の発展の内容について概観したい.

1.1. 周遊点過程

局所コンパクト可分距離空間 S を状態空間とし, $\{(X_t)_{t \geq 0}, (P_x)_{x \in S}\}$ を標準過程 (強マルコフ過程で càdlàg かつ生存時間まで準左連続な道を持つ; cf. [5]) とする. $(X_t)_{t \geq 0}$ は座標過程としておく. S のある一点を 0 と書き, 原点と呼ぶ. このとき, 零点集合 $Z = \{t : X_t = 0 \text{ or } X_{t-} = 0\}$ は閉集合であり, その補集合 Z^c は disjoint な开区間の (高々) 可算和で表せる:

$$Z^c = \{t : X_t \neq 0 \text{ and } X_{t-} \neq 0\} = \bigcup_{l \in D} (g(l), d(l)). \quad (1.1)$$

各々の $(g(l), d(l))$ を **周遊区間 (excursion interval)** と呼び, $\zeta(l) := d(l) - g(l)$ を **生存時間 (lifetime)** と呼ぶ. ここで, Δ を cemetery point として

$$p(l)_t = \begin{cases} X_{t+g(l)} & \text{for } 0 \leq t < \zeta(l), \\ \Delta & \text{for } t \geq \zeta(l) \end{cases} \quad (1.2)$$

と定めると, 原点を離れている間のマルコフ過程の道 $(X_t)_{t \in Z^c}$ は可算個の断片の集まり $(p(l))_{l \in D}$ に分解される. この一つひとつの $p(l)$ を **周遊 (excursion)** と言う. **周遊点過程** $(p(l))_{l \in D}$ の性質に注目する. Itô [16] の周遊理論は以下のようなものである.

原点到達時刻を $T_0 = \inf\{t > 0 : X_t = 0\}$ と書く. 原点が **点再帰的 (point recurrent)** であるとは, 任意の $x \in S$ に対し $P_x(T_0 < \infty) = 1$ なることを言う. まずは, 原点は点再帰的と仮定する. 原点が **正則 (regular for itself)** とは, $P_0(T_0 = 0) = 1$ なることを言う.

(i) 原点が正則でないとき. Blumenthal の 0-1 law より $P_0(T_0 > 0) = 1$. 従って, 正の零点は孤立点の列 $\{t_n\}$ であり, 周遊区間 (t_n, t_{n+1}) における周遊を $p(n)$ と書けば, $\{p(n)\}$ は iid である. 各 $p(n)$ の法則は原点を出発し原点到達とともに消滅する過程の法則と一致する.

(ii) 原点が正則のとき. $(L(t))_{t \geq 0}$ を **原点局所時間** (正值連続加法的汎関数で原点でのみ増加するもの; cf. [5]) とし, その右連続逆過程を $(\eta(l))_{l \geq 0}$ と書くと, 周遊の添字づけ $D = \{l : \eta(l) > \eta(l-)\}$ が得られ, 周遊点過程 $(p(l))_{l \in D}$ は経路空間 E に値をとる **Poisson 点過程** となる.

ここで, 経路空間 E とは, 道 $e : [0, \infty) \rightarrow S \cup \{\Delta\}$ であって次を満たすものの全体: ある $\zeta(e) \in (0, \infty]$ が存在して, $\zeta(e)$ より前までは S を動く càdlàg な道であり, $\zeta(e)$ 以降は Δ に値をとる.

逆に, 周遊点過程 $(p(l))_{l \in D}$ から原点出発の標本路を再構成できる. 実際,

$$X_t = \begin{cases} p(l)_t & \text{if } \eta(l-) \leq t < \eta(l) \text{ for some } l \in D, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.3)$$

* web: <http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~kyano/>

が成り立っている.

原点が再帰的でないときは修正が必要である. Blumenthal [4] に述べられている.

1.2. 周遊測度

原点が正則のとき, 周遊のなす Poisson 点過程 $(p(l))_{l \in D}$ の法則は特性測度 n によって特徴づけられる. この E 上の測度 n を**周遊測度 (excursion measure, - law)** と呼ぶ. n は以下の性質を持つ:

- (n1) $n[\zeta \wedge 1] < \infty$. 特に, $t > 0$ のとき $n(\zeta > t) < \infty$ であり, n はシグマ有限.
- (n2) $n[F_t(X)G(\theta_t X)] = n[F_t(X)P_{X_t}^0[G]]$. ここで, $F_t(X)$ は $\sigma(X_s : s \leq t)$ に関して可測な非負汎関数, $G(X)$ は可測な非負汎関数. θ_t はシフトである.
- (n3) $S \setminus \{0\}$ 上で定義される測度 $j(\cdot) = n(X_0 \in \cdot)$ を**跳入測度 (jumping-in measure)** と呼ぶ. 内部点を出発する周遊の法則は

$$n(\cdot; X_0 \in B) = \int_B j(dx) P_x^0, \quad B \in \mathcal{B}(S \setminus \{0\}) \quad (1.4)$$

で与えられる. 但し, P_x^0 は x を出発し原点で消滅する過程の分布である. この性質により, n は次のように分解される:

$$n = n_0 + \int_{S \setminus \{0\}} j(dx) P_x^0. \quad (1.5)$$

ここで, $n_0 = n|_{\{X_0=0\}}$ は原点を出発する周遊の法則を表す.

周遊測度 n の下での X_t の分布を $\mu_t = n(X_t \in \cdot)$ と書き, **流入法則 (entrance law)** と呼ぶ. 原点消滅過程の推移半群を $(P_t^0)_{t \geq 0}$ と書けば, $\mu_t P_s^0 = \mu_{t+s}$ を満たしている. このことより, 流入法則と原点消滅過程とによって周遊測度は決まることに注意する.

1.3. 停留度

局所時間の逆過程 $(\eta(l))_{l \geq 0}$ は増加加法過程であり, $\zeta(l) = \zeta(p(l))$ として

$$\eta(l) = rl + \sum_{s \leq l} \zeta(s) \quad (1.6)$$

の形に書ける. 定数 $r \geq 0$ を**停留度 (stagnancy rate)** と呼ぶ. 停留度は

$$\int_0^t 1_{\{X_s=0\}} ds = rL(t) \quad (1.7)$$

を満たす. なお, $n(E) < \infty$ のとき, 過程は原点で正の**停留時間 (holding time)** を持ち, その分布は平均 $r/n(E)$ の指数分布に従う.

2. 周遊測度の表示と最小過程の拡張

càdlàg な道を持つ過程 $X = (X_t)_{t \geq 0}$ に対し, 原点消滅過程 $X^0 = (X_t^0)_{t \geq 0}$ を

$$X_t^0 = \begin{cases} X_t & \text{if } t < T_0, \\ \Delta & \text{if } t \geq T_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

で定める. 原点消滅過程がそれ自身であるようなものを最小過程と呼ぶ. 与えられた最小過程 $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ に対し, $X^0 = Y$ を満たすような過程 X を Y の**拡張 (extension)** と呼ぶ. 与えられた最小過程 Y に対し, 可能な拡張の全体は何かを問う問題は**境界問題**と呼ばれる. 周遊測度から標本路を構成できるから (Watanabe [52], [53]), 境界問題は, 周遊測度あるいは流入法則を与える問題に他ならない.

ブラウン運動の場合 (cf. Ikeda–Watanabe [15], Revuz–Yor [40], Knight [26], Yor [71]). 反射壁ブラウン運動の周遊測度 n^{RBM} は以下のような表示を持つ.

$$(n\text{RBM0}) \quad n^{\text{RBM}}[F_t] = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} P_x^0[F_t].$$

この式は一般には言えないが, $n^{\text{RBM}}[F_t \circ \theta_{T_x}] = n^{\text{RBM}}[P_{X(T_x)}^0[F_t]; T_x < \infty] = \frac{1}{x} P_x^0[F_t]$ により正当化できる場合がある.

$$(n\text{RBM1}) \quad n^{\text{RBM}}[F_t; t < \zeta] = P_0^{3B}\left[F_t \cdot \frac{1}{X_t}\right].$$

但し, $\{(X_t)_{t \geq 0}, (P_x^{3B})_{x \geq 0}\}$ は三次元ベッセル過程である.

$$(n\text{RBM2}) \quad n^{\text{RBM}}[F] = \int_0^\infty P_0^{3B}[F \mid X_t = 0] p^{3B}(t, 0, 0) dt.$$

但し, $P_0^{3B}(X_t \in dy) = p^{3B}(t, 0, y) y^2 dy$.

$$(n\text{RBM3}) \quad n^{\text{RBM}}[F] = \int_0^\infty (P_{0;T_x}^{3B} \bullet \check{P}_{0;T_x}^{3B})[F] \frac{dx}{x^2}.$$

但し $P_{0;T_x}^{3B} \bullet \check{P}_{0;T_x}^{3B}$ は, 独立に二つの三次元ベッセル過程を点 x に到達するまで走らせ, 片方を反転させて繋げてできる過程の分布である.

正側における原点吸収壁ブラウン運動の拡張は, **Feller の境界条件** ([8])

$$p_1 f(0) - p_2 f'(0) + \frac{1}{2} p_3 f''(0) - \int_0^\infty \{f(0) - f(x)\} p_4(dx) = 0 \quad (2.2)$$

を持つマルコフ過程である. 但し, p_1, p_2, p_3 は非負定数, p_4 は $(0, \infty)$ 上の非負測度であり, $\int_0^\infty (x \wedge 1) p_4(dx) < \infty$ および

$$p_2 > 0 \quad \text{or} \quad p_3 > 0 \quad \text{or} \quad p_4(0, 1) = \infty \quad (2.3)$$

を満たすものである. Itô–McKean [18] は, 反射壁ブラウン運動の標本路を独立なポアソン過程で変換することで, その標本路を構成した. 一方, 周遊理論によると, 標本路は以下のように構成される:

$$n_0 = p_2 n^{\text{RBM}}, \quad r = p_3, \quad j = p_4 \quad (2.4)$$

として $(p(l))_{l \geq 0}$, $(\eta(l))_{l \geq 0}$, $(Y_t)_{t \geq 0}$ を構成し, 平均 $1/p_1$ の独立な指数時刻 σ を原点局所時間が上回るところで消滅させることで得られる. 周遊理論による構成法は, 一次元拡散過程を

含む一般的な枠組みで Itô [17] によって与えられた．そこでは $p_2 = 0$ すなわち跳入のみの場合に限られていたが，Rogers [42] はこれを一般の場合に拡張した．筆者は最近，有界区間において両端に Feller の境界条件を課す場合の標本路の構成法を与えた [63]．以上の周遊理論による構成法は，Itô–McKean [18] の方法と違って，反射壁過程が存在しない場合にも有効である．

$\mathbb{R}^n$ の半空間 $\{(x^i)_{i=1}^n \mid x^n \geq 0\}$ における拡散過程に対し，境界面 $\{x^n = 0\}$ における一般の境界条件は **Wentzell の境界条件** ([57]) と呼ばれる．周遊理論による標本路の構成は Watanabe [50], [51], Takanobu–Watanabe [48] により得られた (cf. Ikeda–Watanabe [15], Watanabe [55]).

対称拡散過程に対する Fukushima–Tanaka [13] の結果を発展させて，Chen–Fukushima–Ying [7] は弱共役をもつという極めて一般的な右過程に対し，原点停留なしの拡張を一意的に決定した．二つの右過程が弱共役とは，対応するレゾルベント作用素 $(G_\alpha)_{\alpha>0}$, $(\hat{G}_\alpha)_{\alpha>0}$ が，ある測度 m に対して

$$\int_S \hat{G}_\alpha f(x) g(x) m(dx) = \int_S f(x) G_\alpha g(x) m(dx) \quad (2.5)$$

を満たすことを言う．Chen–Fukushima–Ying [7] と Fitzsimmons–Gettoor [10] は独立に，流入法則の特徴づけ公式

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} n[f(X_t)] dt = \int_S f(x) \hat{P}_x[e^{-\alpha T_0}] m(dx) \quad (2.6)$$

を得ている．境界問題のさらなる発展について，最近 Chen–Fukushima [6] が出版された．

反射壁ブラウン運動の周遊測度は三次元ベッセル過程によって表現された．筆者は [62] において，各点が正則な**対称レヴィ過程**に対する周遊測度を調べ，以下の公式を得た．

$$(nsL0) \quad n[F_t] = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{h(x)} P_x^0[F_t].$$

但し， h は原点消滅過程に対する**調和関数**．この式は一般には言えないが， $n[F_t \circ \theta_{T_x}] = n[P_{X(T_x)}^0[F_t]; T_x < \infty] = \frac{1}{h(x)} P_x^0[F_t]$ より正当化できる場合がある (cf. [65]).

$$(nsL1) \quad n[F_t; t < \zeta] = P_0^h \left[F_t \cdot \frac{1}{h(X_t)} \right].$$

但し， $\{(X_t)_{t \geq 0}, (P_x^h)_{x \geq 0}\}$ は h に関する $\{(X_t)_{t \geq 0}, (P_x^0)_{x > 0}\}$ の **Doob 調和変換**．

$$(nsL2) \quad n[F] = \int_0^\infty P_0^h[F \mid X_t = 0] \rho(t) dt + \kappa P_0^h[F].$$

但し， $\rho(t)$ はある完全単調関数， κ は過渡的な場合に生ずる定数で $P_x(T_0 = \infty) = \kappa h(x)$ を満たす．

3. 正側滞在時間

ブラウン運動の正側滞在時間の分布関数は逆正弦関数によって表されることが **Lévy の逆正弦法則** (Lévy’s arc-sine law) としてよく知られている．この結果は Barlow–Pitman–Yor [2] によって**歪ベッセル過程** (skew Bessel process) に拡張され，その分布は Lamperti [29] の分布であることが示された．Watanabe [54] は，周遊理論に基づく **Williams の公式** を駆

使し、原点停留のない一次元拡散過程の正側滞在時間に対する極限定理を得た。筆者は共同研究 Watanabe–Yano–Yano [56] で、密度関数の極限定理を得た。Kasahara–Watanabe [21], [22], [23] は極限が退化あるいは自明な場合の繰り込み極限定理を得ている。

ここで、Williams の公式とは次のものである。 $(X(t))_{t \geq 0}$ を原点停留のない一次元拡散過程とし、正側滞在時間を $A_+(t) = \int_0^t 1_{\{X(s) > 0\}} ds$, 負側滞在時間を $A_-(t) = \int_0^t 1_{\{X(s) < 0\}} ds$ で表す。 $X_+(t) = X(A_+^{-1}(t))$, $X_-(t) = X(A_-^{-1}(t))$ と定めると、 $(X_+(t))_{t \geq 0}$ と $(X_-(t))_{t \geq 0}$ は独立で、それぞれ正側および負側の反射壁過程となる。 $(X_+(t))_{t \geq 0}$ の局所時間を $(L_+(t))_{t \geq 0}$, $(X_-(t))_{t \geq 0}$ の局所時間の逆過程を $(\eta_-(l))_{l \geq 0}$ と書くと、Williams の公式

$$A_+^{-1}(t) = t + \eta_-(L_+(t)) \quad (3.1)$$

が成立する。

Fujihara–Kawamura–Y. Yano [12] は離散時刻過程に対する Williams の公式を駆使し、正側滞在時間の極限定理を得た。最近では、Kajino–Kumagai–Kwaśnicki–Watanabe–Yano [19] が(両側無限)**Sierpiński gasket** 上のブラウン運動に対する片側滞在時間分布の極限定理を得ている。また、Y. Yano [70] は**マルチレイ**上の拡散過程に対しても Williams の公式が成立することを示し、Barlow–Pitman–Yor [2] の結果の一般化を得ている。

ちなみに、ブラウン橋の正側滞在時間は一様分布であることも Lévy の結果としてよく知られている。その結果の拡張として拡散過程の bridge process に対する正側滞在時間を Y. Yano [69] および Yano–Yano [64] で調べているが、証明は周遊理論ではなく、**Kac 公式**に基づく。

Gettoor–Sharpe [14] はレヴィ過程の正側滞在時間の極限定理を調べ、**Spitzer 条件**の下で極限がベータ分布であることを示した(逆に、収束から Spitzer 条件が従うことも示している)。証明の方針は乱歩に対する **Sparre–Andersen 公式**である。Fitzsimmons–Gettoor [9] は **Fluctuation theory** を用いてレヴィ過程の正側滞在時間のラプラス変換公式を導出し、bridge process の正側滞在時間が一様分布に従うことを示している。なお、Gettoor–Sharpe の定理については Bertoin [3] も参照されたい。

4. 不変原理

一次元拡散過程は、**自然尺度 (natural scale)** にすると、**標準測度 (speed measure)** と呼ばれる測度 m のみによって決まる。正則な場合は、**Krein のスペクトル理論**を用いることで、一次元拡散過程の詳しい解析が可能となる (cf. Kotani–Watanabe [28], Kasahara [20])。簡単のため、原点反射壁過程のみ考えることにする。反射壁ブラウン運動 $(B(t))_{t \geq 0}$ とその局所時間 $(\ell(t, x))_{t \geq 0, x \geq 0}$ を考え、積分

$$A_m(t) = \int_{0-}^{\infty} \ell(t, x) dm(x) \quad (4.1)$$

によって**時間変更 (time-change)**を施して得られる過程 $Y(t) = B(A_m^{-1}(t))$ が求める一次元拡散過程となる。 m が無限遠で正則変動、すなわち、 $0 < \alpha < 1$ として

$$m(x) \sim x^{\frac{1}{\alpha}-1} K(x) \quad \text{as } x \rightarrow \infty \quad (4.2)$$

であるとき ($K(x)$ は緩変動), 過程は零再帰的 (null recurrent) であり, $m_\lambda(x) = \frac{m(\lambda x)}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}-1}K(\lambda)}$ とおけば, **不変原理 (invariance principle)**

$$\frac{1}{\lambda}Y\left(\lambda^{\frac{1}{\alpha}}K(\lambda)t\right) \stackrel{d}{=} B\left(A_{m_\lambda}^{-1}(t)\right) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} B\left(A_{m^{(\alpha)}}^{-1}(t)\right) \quad (4.3)$$

が得られる. ここで, $m^{(\alpha)}(x) = x^{\frac{1}{\alpha}-1}$ であり, 極限は次元 $d = 2 - 2\alpha$ のベッセル過程である.

一方, **正再帰的 (positive recurrent)** な一次元拡散過程はそのままでは不変原理が成立しない. しかし, 前述の Kasahara–Watanabe [22] は, 退化する正側滞在時間のスケール極限について, そのゆらぎの極限定理を得た. 同時期に, Kotani [27] は Krein のスペクトル論を拡張し, Krein のスペクトル理論を極限円型 string に対して拡張した. 最近, Kasahara–Watanabe [24], [25] が漸近理論を確立した. 筆者は, 一連の研究 Yano [59], Fitzsimmons–Yano [11], Yano [60] において, **一般化周遊測度**を導入することで, 正再帰的拡散過程の**彷徨過程 (meander)**の不変原理や, Feller の境界条件を持つ拡散過程の不変原理を得た.

一般化周遊測度は次のように定義できる (Fitzsimmons–Yano [11]). 反射壁ブラウン運動の周遊測度 n^{RBM} の下での座標過程 $(X_t)_{t \geq 0}$ に対し, 局所時間 $(\ell(t, x))_{t \geq 0, x \geq 0}$ が対応する ([4]). 標準測度 m に対して積分 (4.1) によって時間変更を施して得られる過程 $Y(t) = X(A_m^{-1}(t))$ を考えると, その法則 n_m が求めるものである. n_m は以下のような表示を持つ.

$$(n\text{GE0}) \quad n_m[F] = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} P_x^0[F].$$

この式は一般には言えないが, $n_m[F \circ \theta_{T_x}] = n_m\left[P_{X(T_x)}^0[F]; T_x < \infty\right] = \frac{1}{x} P_x^0[F]$ より正当化できる場合がある.

$$(n\text{GE1}) \quad n_m[F_t; t < \zeta] = P_0^h\left[F_t \cdot \frac{1}{X_t}\right].$$

但し, $\{(X_t)_{t \geq 0}, (P_x^h)_{x \geq 0}\}$ は自然尺度 x に関する $\{(X_t)_{t \geq 0}, (P_x^0)_{x > 0}\}$ の **Doob 調和変換**.

$$(n\text{GE2}) \quad n_m[F] = \int_0^\infty P_0^h[F \mid X_t = 0] p^h(t, 0, 0) dt.$$

但し, $P_0^h(X_t \in dy) = p^h(t, 0, y) y^2 dy$ であり, これが存在するときに限る (cf. [59]).

$$(n\text{GE3}) \quad n_m[F] = \int_0^\infty (P_{0;T_x}^h \bullet \check{P}_{0;T_x}^h)[F] \frac{dx}{x^2}.$$

一般化周遊測度は, それを特性測度とする Poisson 点過程を作ることにはできるが, 条件 (n1) を満たさない ($n_m[\zeta \wedge 1] = \infty$) ため, $(\eta(l))_{l \geq 0}$ が発散してしまう. 従って, 周遊測度としての意味は持っていない. しかしながら, 彷徨過程, すなわち確率測度 $n_m(\cdot \mid \zeta > 1)$ を分布とする過程は意味を持つ (Fitzsimmons–Yano [11]). また, 跳入からなる周遊測度を

$$\int_0^\infty j(dx) P_x^0[F] = \int_0^\infty j(dx) x \cdot \frac{1}{x} P_x^0[F] = \int_0^\infty j(dx) x \cdot n_m[F \circ \theta_{T_x}] \quad (4.4)$$

の形に書き直すことで, 極限定理を優収束定理に帰着させて見通しよく議論できる, という技術的な有難みがある (Yano [60]).

5. 処罰問題

Roynette–Vallois–Yor(cf. [45],[46])により盛んに研究された**処罰問題 (penalisation problem)**とは、確率過程 $\{(X_t)_{t \geq 0}, (P_x)_{x \in \mathbb{R}}\}$ に重み $(\Gamma_t)_{t \geq 0}$ を掛けて正規化したものの極限

$$\frac{\Gamma_t}{P_x[\Gamma_t]} \cdot P_x \xrightarrow{t \rightarrow \infty} Q_x \quad (5.1)$$

が存在するかどうか、もし存在すれば極限過程 $\{(X_t)_{t \geq 0}, (Q_x)_{x \in \mathbb{R}}\}$ はどのようなものか、を問う問題である。ここでは、 $P_x[\Gamma_t] \rightarrow 0$ なる場合に興味がある。例えば $\Gamma_t = 1_{\{S_t < 0\}}$ とすると全時間で負側に滞在する条件付けを表す。あるいは、Kac 消滅 $\Gamma_t = \exp\left(-\int_0^t V(X_s)ds\right)$ とすると全時間で消滅が起こらない条件付けを表す。

Roynette–Vallois–Yor(cf. [45],[46])はブラウン運動について、重みが最大値過程の関数、局所時間の関数、Kac 消滅のそれぞれの場合について個別に論じ、極限定理を得た。Najnudel–Roynette–Yor [32] は、シグマ有限測度

$$\mathcal{W} = \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{2\pi u}} (\Pi^{(u)} \bullet P_0^{\text{s3B}}) \quad (5.2)$$

を導入することで、処罰問題の極限測度に統一的な見方を与えた。ここで、 $\Pi^{(u)}$ は原点から原点への長さ u のブラウン橋、 P_0^{s3B} は三次元ベッセル過程の対称化であり、 $\bullet$ は二つの独立な過程を繋げてできる過程の法則を表す。この理論の中心となるのは、周遊理論から得られる次の経路分解公式である：

$$P[F_t] = \int_0^t \frac{du}{\pi \sqrt{u(t-u)}} (\Pi^{(u)} \bullet M^{(t-u)}) [F_t]. \quad (5.3)$$

ここで、 $M^{(s)} = n(\cdot | \zeta > s)$ は彷徨過程の法則である。

筆者の共同研究 Yano–Yano–Yor [66], [67] および Y. Yano [68] は安定レヴィ過程に対する類似の問題を解決した。安定レヴィ過程では、重みが局所時間の関数または Kac 消滅の場合 (YYY [66]) と、最大値過程の関数の場合 (YYY [67], Y. Y [68]) とで事情がかなり異なる。前者は $\mathcal{W}$ の表示 (5.2) の一般化であるのに対し、後者は $\mathcal{W}$ の負部分

$$\mathcal{W}^- = \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{2\pi u}} (\Pi^{(u)} \bullet \check{P}_0^{\text{3B}}) \quad (5.4)$$

に対する別の表示

$$\mathcal{W}^- = \int_0^\infty dx (P_{0 \nearrow x}^{\text{BM}} \bullet P_{x \downarrow}^{\text{BM}}) \quad (5.5)$$

の一般化である。ここで、 $P_{0 \nearrow x}^{\text{BM}}$ は原点を出発して x に到達するまでのブラウン運動の法則、 $P_{x \downarrow}^{\text{BM}}$ は“ x マイナス三次元ベッセル過程”の法則である。公式 (5.4) と (5.5) とが一致することは、一般の一次元拡散過程に対する Pitman–Yor [38] の **agreement formula** から得られる：

$$\int_0^\infty dt p(t, 0, 0) P_0(\cdot | X_t = 0) = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2} (P_{0, T_x} \bullet \check{P}_{0, T_x}). \quad (5.6)$$

但し, $P_0(X_t \in dy) = p(t, 0, y)dm(y)$ とした. この公式は, 反射壁ブラウン運動の周遊測度に対する二つの表示 (nRBM2) と (nRBM3) とが一致するという事実の拡張である.

また, 筆者が [61] において示したことだが, ウィーナー測度に対して成り立つ Cameron–Martin の公式の類似が W においても成立することに注意しておく.

6. その他

周遊理論について連続時間マルコフ連鎖から説明したものに, Rogers–Williams [44], Rogers [43] がある. また, 以下の解説も参考になる: Salminen–Vallois–Yor [47], Pitman–Yor [39], Yor [72].

以下は, 筆者が目下勉強中のものの覚書きである.

(1) Virág [49] は上半平面 $\mathbb{H} = \{(x, y) \mid y \geq 0\}$ の **ブラウン周遊 (Brownian excursion)** に対して周遊点過程の類似を考察し, それを **Brownian beads** と呼んでいる. ブラウン周遊とは x 軸方向にブラウン運動 y 軸方向に独立な三次元ベッセル過程で動く二次元過程 $(X_t)_{t \geq 0}$ を指す. **切断点 (cut point)** でのみ増加する局所時間を導入し, 等角写像で $\mathbb{H} \setminus \{X_s : s \leq t\}$ を $\mathbb{H}$ に写すことで, Brownian beads の Poisson 点過程が得られると主張している. 同様に等角不変性が鍵となるものとして, **SLE (Schramm Löwner evolution)** から周遊点過程を得る研究も盛んである: cf. Lawler–Werner [31], Lawler [30], Werner [58].

(2) Picard [36] は, ブラウン運動の周遊測度を用いて, **マルチンゲールの表現公式**を得ている. よく知られている **Clark–Ocone の公式**は Malliavin 微分を用いるため微分可能性の仮定を置くが, Picard の公式は積分表現であるため弱い仮定で済むと主張している.

(3) 与えられた一次元確率分布に対し, ブラウン運動をある停止時刻で止めたものの分布がそれとなるような停止時刻の存在を問う問題は **Skorokhod 埋め込み問題**と呼ばれる. Azema–Yor [1] はブラウン運動と最大値過程を使って停止時刻を構成した (cf. [40]) が, Rogers [41] は周遊理論を用いてその簡明な別証を与えた. スペクトル片側レヴィ過程などへの拡張が Oblój [33], [34], Pistorius [37], Oblój–Pistorius [35] により得られている.

参考文献

- [1] J. Azéma and M. Yor. Une solution simple au problème de Skorokhod. In *Séminaire de Probabilités, XIII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1977/78)*, volume 721 of *Lecture Notes in Math.*, pages 90–115. Springer, Berlin, 1979.
- [2] M. Barlow, J. Pitman, and M. Yor. Une extension multidimensionnelle de la loi de l’arc sinus. In *Séminaire de Probabilités, XXIII*, volume 1372 of *Lecture Notes in Math.*, pages 294–314. Springer, Berlin, 1989.
- [3] J. Bertoin. *Lévy processes*, volume 121 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [4] R. M. Blumenthal. *Excursions of Markov processes*. Probability and its Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992.

- [5] R. M. Blumenthal and R. K. Gettoor. *Markov processes and potential theory*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 29. Academic Press, New York, 1968.
- [6] Z.-Q. Chen and M. Fukushima. *Symmetric Markov processes, time change, and boundary theory*. London Mathematical Society Monographs Series. Princeton University Press, 2011.
- [7] Z.-Q. Chen, M. Fukushima, and J. Ying. Extending Markov processes in weak duality by Poisson point processes of excursions. In *Stochastic analysis and applications*, volume 2 of *Abel Symp.*, pages 153–196. Springer, Berlin, 2007.
- [8] W. Feller. Generalized second order differential operators and their lateral conditions. *Illinois J. Math.*, 1:459–504, 1957.
- [9] P. J. Fitzsimmons and R. K. Gettoor. Occupation time distributions for Lévy bridges and excursions. *Stochastic Process. Appl.*, 58(1):73–89, 1995.
- [10] P. J. Fitzsimmons and R. K. Gettoor. Excursion theory revisited. *Illinois J. Math.*, 50(1-4):413–437 (electronic), 2006.
- [11] P. J. Fitzsimmons and K. Yano. Time change approach to generalized excursion measures, and its application to limit theorems. *J. Theoret. Probab.*, 21(1):246–265, 2008.
- [12] E. Fujihara, Y. Kawamura, and Y. Yano. Functional limit theorems for occupation times of Lamperti’s stochastic processes in discrete time. *J. Math. Kyoto Univ.*, 47(2):429–440, 2007.
- [13] M. Fukushima and H. Tanaka. Poisson point processes attached to symmetric diffusions. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 41(3):419–459, 2005.
- [14] R. K. Gettoor and M. J. Sharpe. On the arc-sine laws for Lévy processes. *J. Appl. Probab.*, 31(1):76–89, 1994.
- [15] N. Ikeda and S. Watanabe. *Stochastic differential equations and diffusion processes*, volume 24 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, second edition, 1989.
- [16] K. Itô. Poisson point processes attached to Markov processes. In *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971)*, Vol. III: Probability theory, pages 225–239, Berkeley, Calif., 1972. Univ. California Press.
- [17] K. Itô. *Poisson point processes and their application to Markov processes*. Lecture note of Mathematics Department, Kyoto University, mimeograph printing, 1969.
- [18] K. Itô and H. P. McKean, Jr. Brownian motions on a half line. *Illinois J. Math.*, 7:181–231, 1963.
- [19] N. Kajino, T. Kumagai, M. Kwaśnicki, S. Watanabe, and Y. Yano. Asymptotic behavior of the law of the occupation time for Brownian motion and random walk on fractals. in preparation.
- [20] Y. Kasahara. Spectral theory of generalized second order differential operators and its applications to Markov processes. *Japan. J. Math. (N.S.)*, 1(1):67–84, 1975/76.
- [21] Y. Kasahara and S. Watanabe. Occupation time theorems for a class of one-dimensional diffusion processes. *Period. Math. Hungar.*, 50(1-2):175–188, 2005.
- [22] Y. Kasahara and S. Watanabe. Brownian representation of a class of Lévy processes and its application to occupation times of diffusion processes. *Illinois J. Math.*, 50(1-4):515–539 (electronic), 2006.
- [23] Y. Kasahara and S. Watanabe. Occupation time theorems for one-dimensional random walks and diffusion processes in random environments. *Stochastic Process. Appl.*, 119(2):347–372, 2009.
- [24] Y. Kasahara and S. Watanabe. Remarks on Krein-Kotani’s correspondence between strings and Herglotz functions. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 85(3):22–26, 2009.
- [25] Y. Kasahara and S. Watanabe. Asymptotic behavior of spectral measures of Krein’s and Kotani’s strings. *Kyoto J. Math.*, 50(3):623–644, 2010.

- [26] F. B. Knight. *Essentials of Brownian motion and diffusion*, volume 18 of *Mathematical Surveys*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1981.
- [27] S. Kotani. Krein's strings with singular left boundary. *Rep. Math. Phys.*, 59(3):305–316, 2007.
- [28] S. Kotani and S. Watanabe. Krein's spectral theory of strings and generalized diffusion processes. In *Functional analysis in Markov processes (Katata/Kyoto, 1981)*, volume 923 of *Lecture Notes in Math.*, pages 235–259. Springer, Berlin, 1982.
- [29] J. Lamperti. An occupation time theorem for a class of stochastic processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 88:380–387, 1958.
- [30] G. F. Lawler. *Conformally invariant processes in the plane*, volume 114 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.
- [31] G. F. Lawler and W. Werner. The Brownian loop soup. *Probab. Theory Related Fields*, 128(4):565–588, 2004.
- [32] J. Najnudel, B. Roynette, and M. Yor. *A global view of Brownian penalisations*, volume 19 of *MSJ Memoirs*. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2009.
- [33] J. Obłój. The Skorokhod embedding problem and its offspring. *Probab. Surv.*, 1:321–390 (electronic), 2004.
- [34] J. Obłój. An explicit solution to the Skorokhod embedding problem for functionals of excursions of Markov processes. *Stochastic Process. Appl.*, 117(4):409–431, 2007.
- [35] J. Obłój and M. Pistorius. On an explicit Skorokhod embedding for spectrally negative Lévy processes. *J. Theoret. Probab.*, 22(2):418–440, 2009.
- [36] J. Picard. Brownian excursions, stochastic integrals, and representation of Wiener functionals. *Electron. J. Probab.*, 11:no. 8, 199–248 (electronic), 2006.
- [37] M. R. Pistorius. An excursion-theoretical approach to some boundary crossing problems and the Skorokhod embedding for reflected Lévy processes. In *Séminaire de Probabilités XL*, volume 1899 of *Lecture Notes in Math.*, pages 287–307. Springer, Berlin, 2007.
- [38] J. Pitman and M. Yor. Decomposition at the maximum for excursions and bridges of one-dimensional diffusions. In *Itô's stochastic calculus and probability theory*, pages 293–310. Springer, Tokyo, 1996.
- [39] J. Pitman and M. Yor. Itô's excursion theory and its applications. *Jpn. J. Math.*, 2(1):83–96, 2007.
- [40] D. Revuz and M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1999.
- [41] L. C. G. Rogers. Williams' characterisation of the Brownian excursion law: proof and applications. In *Seminar on Probability, XV (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1979/1980) (French)*, volume 850 of *Lecture Notes in Math.*, pages 227–250. Springer, Berlin, 1981.
- [42] L. C. G. Rogers. Itô excursion theory via resolvents. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 63(2):237–255, 1983. Addendum: 67(4):473–476, 1984.
- [43] L. C. G. Rogers. A guided tour through excursions. *Bull. London Math. Soc.*, 21(4):305–341, 1989.
- [44] L. C. G. Rogers and D. Williams. *Diffusions, Markov processes, and martingales. Vol. 2*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Itô calculus, Reprint of the second (1994) edition.
- [45] B. Roynette, P. Vallois, and M. Yor. Some penalisations of the Wiener measure. *Jpn. J. Math.*, 1(1):263–290, 2006.
- [46] B. Roynette and M. Yor. *Penalising Brownian paths*, volume 1969 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [47] P. Salminen, P. Vallois, and M. Yor. On the excursion theory for linear diffusions. *Jpn. J. Math.*, 2(1):97–127, 2007.

- [48] S. Takanobu and S. Watanabe. On the existence and uniqueness of diffusion processes with Wentzell's boundary conditions. *J. Math. Kyoto Univ.*, 28(1):71–80, 1988.
- [49] B. Virág. Brownian beads. *Probab. Theory Related Fields*, 127(3):367–387, 2003.
- [50] S. Watanabe. Excursion point process of diffusion and stochastic integral. In *Proceedings of the International Symposium on Stochastic Differential Equations (Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., Kyoto, 1976)*, pages 437–461, New York, 1978. Wiley.
- [51] S. Watanabe. Construction of diffusion processes with Wentzell's boundary conditions by means of Poisson point processes of Brownian excursions. In *Probability theory (Papers, VIIth Semester, Stefan Banach Internat. Math. Center, Warsaw, 1976)*, volume 5 of *Banach Center Publ.*, pages 255–271. PWN, Warsaw, 1979.
- [52] S. Watanabe. Excursion point processes and diffusions. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Warsaw, 1983)*, pages 1117–1124, Warsaw, 1984. PWN.
- [53] S. Watanabe. Construction of semimartingales from pieces by the method of excursion point processes. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 23(2, suppl.):297–320, 1987.
- [54] S. Watanabe. Generalized arc-sine laws for one-dimensional diffusion processes and random walks. In *Stochastic analysis (Ithaca, NY, 1993)*, volume 57 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 157–172. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [55] S. Watanabe. Itô's theory of excursion point processes and its developments. *Stochastic Process. Appl.*, 120(5):653–677, 2010.
- [56] S. Watanabe, K. Yano, and Y. Yano. A density formula for the law of time spent on the positive side of one-dimensional diffusion processes. *J. Math. Kyoto Univ.*, 45(4):781–806, 2005.
- [57] A. D. Wentzell. On boundary conditions for multi-dimensional diffusion processes. *Theor. Probability Appl.*, 4:164–177, 1959.
- [58] W. Werner. Poisson point processes, excursions and stable processes in two-dimensional structures. *Stochastic Process. Appl.*, 120(5):750–766, 2010.
- [59] K. Yano. Excursion measure away from an exit boundary of one-dimensional diffusion processes. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 42(3):837–878, 2006.
- [60] K. Yano. Convergence of excursion point processes and its applications to functional limit theorems of Markov processes on a half-line. *Bernoulli*, 14(4):963–987, 2008.
- [61] K. Yano. Cameron-Martin formula for the σ -finite measure unifying Brownian penalisations. *J. Funct. Anal.*, 258(10):3492–3516, 2010.
- [62] K. Yano. Excursions away from a regular point for one-dimensional symmetric Lévy processes without Gaussian part. *Potential Anal.*, 32(4):305–341, 2010.
- [63] K. Yano. Diffusion processes on intervals subject to Feller's boundary conditions. in preparation.
- [64] K. Yano and Y. Yano. Remarks on the density of the law of the occupation time for Bessel bridges and stable excursions. *Statist. Probab. Lett.*, 78(14):2175–2180, 2008.
- [65] K. Yano, Y. Yano, and M. Yor. On the laws of first hitting times of points for one-dimensional symmetric stable Lévy processes. In *Séminaire de probabilités XLII*, volume 1979 of *Lecture Notes in Math.*, pages 187–227. Springer, Berlin, 2009.
- [66] K. Yano, Y. Yano, and M. Yor. Penalising symmetric stable Lévy paths. *J. Math. Soc. Japan*, 61(3):757–798, 2009.
- [67] K. Yano, Y. Yano, and M. Yor. Penalisation of a stable Lévy process involving its one-sided supremum. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 46(4):1042–1054, 2010.
- [68] Y. Yano. A remarkable σ -finite measure unifying supremum penalisations for a stable Lévy process. *Preprint*, 2010.

- [69] Y. Yano. On the occupation time on the half line of pinned diffusion processes. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 42(3):787–802, 2006.
- [70] Y. Yano. On the joint law of the occupation times for a diffusion process on multiray. in preparation.
- [71] M. Yor. *Local times and excursions for Brownian motion: a concise introduction*. Universidad Central de Venezuela, 1995. Caracas lecture note.
- [72] M. Yor. Some aspects of K. Itô’s works. *Eur. Math. Soc. Newsl.*, (72):11–12, 2009.