On a stochastic Fourier coefficient

小川 重義　（立命館大学）
植村 英明　（愛知教育大学）

(i) **確率** Fourier **係数**.　$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を 1次元 Wiener 空間とする。$f(t,\omega) \in L^2([0,1]\times\Omega, dt\times dP)$ と $L^2([0,1],dt)$ の完全正規直交基底 $\{\varphi_n(t)\}$ に対して，

$$\hat{f}_n(\omega) := \int_0^1 f(t,\omega)\overline{\varphi_n(t)}d_*W_t \tag{1}$$

を $f(t,\omega)$ の $\{\varphi_n(t)\}$ に対する確率 Fourier 係数と呼ぶ。($\overline{z}$ は z の複素共役)

本講演の目的は $\{\hat{f}_n(\omega)\}$ から $f(t,\omega)$ を再現することである。なおここでは $f(t,\omega)$ の $\mathcal{F}_t$ 適合性は仮定しない（ $\mathcal{F}_t$: Brownian filtration)。従って一般に上記 (1) での積分 $\int d_*W_t$ は非因果的確率積分を意味しているが、本講演では Skorokhod 積分の場合を考察対象とする。(1) の正確な定義のために次の準備を行う。

(ii) Skorokhod **積分**.　$f(t,\omega) \in L^2([0,1]\times\Omega, dt\times dP)$ は次の Wiener-Itô 展開を持つ。

$$f(t,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(k_n^f(t)).$$

ここで $I_n(k_n^f(t))$ は $k_n^f(t)$ を被積分関数とする n 重 Wiener 積分をを表す：

$$\begin{cases} k_n^f(t) = k_n^f(t;t_1,t_2,\dots,t_n) \\ I_n(k_n^f(t)) = \displaystyle\int_0^1 \cdots \int_0^1 k_n^f(t;t_1,t_2,\dots,t_n)dW_{t_1}\cdots dW_{t_n}. \end{cases}$$

ただし $k_n^f(t)$ は $L^2([0,1]^n, dt_1\cdots dt_n)$ の元で $t_1,t_2,\dots,t_n$ に関して対称なものとする。

$$E[f(t,\omega)^2] = \sum_{n=0}^{\infty} n!|k^f(t;\cdot)|_n^2 \quad (|k^f(t,\cdot)|_n \text{は}\ k^f(t;\cdot)\ \text{の}\ L^2([0,1]^n, dt_1\cdots dt_n)\ \text{ノルム})$$

に注意する。ここで $f(t,\omega)$ の Skorokhod 積分 $\int_0^1 f(t,\omega)d_SW_t$ を次で定義する。

$$\int_0^1 f(t,\omega)d_SW_t = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(k_n^f(\cdot)^{\sim}).$$

ただし $k_n^f(\cdot)^{\sim}$ は $k_n^f(\cdot)$ の対称化を表す。この Skorokhod 積分が $L^2(\Omega, dP)$ の元となるために，次の条件を課す。

$$\sum_{n=0}^{\infty} nn!|k_n^f|_{n+1}^2 \left(= \int_0^1 dt \int_0^1 ds E[|D_s f(t)|^2]\right) < \infty. \tag{2}$$

ここで $|k_n^f|_{n+1}^2 = \int_0^1 |k^f(t;\cdot)|_n^2 dt$ である。また D は H-微分を表す。

以降，本講演で扱う CONS の関数 φ_n は有界であるとする。このとき (1) を Skorokhod 積分として定義すると， (1) は $L^2(\Omega, dP)$ の元として定まる。

(iii) **三角関数系に対する確率 Fourier 係数と再現定理**.　$e_k(t)\,(k \in \mathbb{Z})$ を三角関数とする。

$$e_k(t) := \exp\{2\pi\sqrt{-1}kt\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$\{\hat{f}_k(\omega)\}$ を $f(t,\omega)$ の $\{e_k(t)\}$ に対する確率 Fourier 係数とする。このとき，次の定理が成り立つ。

定理 1. $f(t,\omega)$ を条件 (2) を満たす 2 乗可積分関数とする。このとき $f(t,\omega)$ は $\{e_k(t)\}$ に対する確率 *Fourier* 係数 $\{\hat{f}_k(\omega)\}$ から再現される。

(iv) **一般の CONS に対する確率 Fourier 係数と再現定理**.　有界関数列 $\{\varphi_n(t)\}$ を $L^2([0,1],dt)$ の完全正規直交基底とする。この CONS に対して確率 Fourier 係数 $\{\hat{f}_n(\omega)\}$ が与えられているとする。ここで次の 2 条件を導入する。

$$\sup_{0\le t\le 1} E[|f(t,\omega)|^2] < \infty, \tag{3}$$

$$\sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 E[|D_s f(t,\omega)|^2] ds < \infty. \tag{4}$$

まず次の命題に注意する。

命題 1. $f(t,\omega)$ を条件 (3), (4) を満たす 2 乗可積分関数とする。このとき任意の有界関数 φ に対して，次を満たす定数 C がある。

$$E\left[\left|\int_0^1 f(t,\omega)\varphi(t) d_S W_t\right|^2\right] \le C \int_0^1 |\varphi(t)|^2\, dt.$$

$e_k(t)$ の $\{\varphi_n(t)\}$ による直交展開と上の命題から，次の定理が導かれる。

定理 2. $f(t,\omega)$ を条件 (3), (4) を満たす 2 乗可積分関数とする。このとき $f(t,\omega)$ は $\{\varphi_n(t)\}$ に対する確率 *Fourier* 係数 $\{\hat{f}_n(\omega)\}$ から再現される。

(v) **確率 Fourier 係数に 2 乗可積分性を課さない場合**.　$f(t,\omega)$ に条件 (2) を課さないとき，確率 Fourier 係数 $\{\hat{f}_n(\omega)\}$ は Watanabe の Sobolev 空間 $\mathbf{D}_2^{-1}$ の元として存在する。

$$\mathbf{D}_2^{-1} = \{g = \sum I_n(k_n^g); \|g\|_{2,-1}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{-1} n! |(k_n^g)^{\sim}|_n^2 < \infty\}.$$

(iv) で展開したものと同様の議論の結果，次の定理が導かれる。

定理 3. $f(t,\omega)$ を 2 乗可積分関数とする。このとき $f(t,\omega)$ は $\{e_k(t)\}$ に対する確率 *Fourier* 係数 $\{\hat{f}_k(\omega)\}$ から再現される。

定理 4. $f(t,\omega)$ を条件 (3) を満たす 2 乗可積分関数とする。このとき $f(t,\omega)$ は $\{\varphi_n(t)\}$ に対する確率 *Fourier* 係数 $\{\hat{f}_n(\omega)\}$ から再現される。

参考文献

[1] S. Ogawa, *On a stochastic Fourier transformation*, preprint.

[2] S. Ogawa & H. Uemura, *On a stochastic Fourier coefficient — case of noncausal functions —*, preprint.