Ginibre 点過程の *Palm* 測度：絶対連続性と特異性

長田博文 (九州大学)・白井朋之 (九州大学)

Polish 空間上の点測度の可算和からなるラドン測度を配置といい、その全体に漠位相を入れたものを配置空間という。点過程とは配置空間上の確率測度であり、可算無限個のラベルを付けない粒子系を表現する。

Ginibre 点過程とは複素平面 $\mathbb{C}$ の点過程で、Lebesgue 測度に対する n 点相関関数 ρ^n が

$$\rho^n(x_1,\ldots,x_n) = \det[K(x_i,x_j)]_{1\le i,j\le n} \tag{1}$$

で与えられる確率測度 μ である。ここで $K:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ は

$$K(x,y) = \frac{1}{\pi}e^{-\frac{|x|^2}{2}-\frac{|y|^2}{2}}\cdot e^{x\bar{y}} \tag{2}$$

で定義される核関数である。定義から、Ginibre 点過程は (K,dx) で生成される行列式測度である。

Ginibre 点過程は平行移動および回転不変であり、平行移動に関してエルゴード的である。また、直感的には、2 次元 Coulomb potential

$$\Psi(x) = -2\log|x|$$

によって、互いに干渉しあう無限粒子系の平衡分布を表す。つまり、非常に形式的には、

$$\bar{\mu} = \text{const.}\prod_{i<j}^{\infty}|x_i-x_j|^2\prod_{k=1}^{\infty}dx_k \tag{3}$$

と表現することができる。また、標準的な有限粒子系による近似からは、次の形も形式的表現の候補となる。

$$\bar{\mu} = \text{const.}\prod_{i<j}^{\infty}|x_i-x_j|^2\prod_{k=1}^{\infty}e^{-|x_k|^2}dx_k \tag{4}$$

通常、Ruelle クラスのポテンシャルに対しては、(3) や (4) の表示は、その条件付き確率に対する DLR 方程式によって正当化される。しかし 2 次元 Coulomb potential は、無限大で可積分性がない（それどころか非有界である）ため、Ruelle クラスのポテンシャルにはならず、DLR 方程式による正当化はできない。最近、[1] において、対数微分の概念を用いて、(3) の正当化がなされた。この対数微分を用いた定式化は、ある意味、DLR 方程式の微分形であり、一般の Coulomb ポテンシャルに対しても意味を持つ可能性がある。また、[2] おいて Ginibre 点過程が準 Gibbs 測度であること、つまりその条件付き確率が、局所有界な密度関数を持つことが示された。このように、Ginibre 点過程は DLR 方程式は満たさないものの、DLR 方程式が果たす 2 つの役割、「ポテンシャルとの関係」と、「局所有界な密度の存在」を、対数微分と準 Gibbs 性という 2 つの概念を導入することで証明することができる。そして、その応用として対応する拡散過程が構成され、無限次元確率微分方程式 $\mathbf{X}=(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$

$$dX_t^i = dB_t^i + \lim_{r\to\infty}\sum_{|X_t^i-X_t^j|<r,\ j\neq i}\frac{X_t^i-X_t^j}{|X_t^i-X_t^j|^2}dt \qquad (\mathbf{X}_0=(x_i)_{i\in\mathbb{N}}) \tag{5}$$

が解かれている。この解は同時に、

$$dX_t^i = dB_t^i - X_t^i + \lim_{r\to\infty}\sum_{|X_t^j|<r,\ j\neq i}\frac{X_t^i-X_t^j}{|X_t^i-X_t^j|^2}dt \qquad (\mathbf{X}_0=(x_i)_{i\in\mathbb{N}}) \tag{6}$$

[1] という SDE を満たす。これら二つの方程式から、上記 (3) と (4) の形式表現はともに合理性がある。

この講演では、Ginibre 点過程の Palm 測度：絶対連続性と特異性を論じる。まず、$\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_m)\in\mathbb{C}^m$ で条件づけた μ の (reduced)Palm 測度 $\mu_{\mathbf{x}}$

$$\mu_{\mathbf{x}}(\cdot) = \mu(\cdot - \sum_{i=1}^{m}\delta_{x_i}\ |\mathsf{s}(x_i)\ge 1 \quad (i=1,\ldots,m)) \tag{7}$$

を考える。尚、$m = 0$ のとき、$\mu_{\mathbf{x}} = \mu$ と約束する。

一般に、μ が Ruelle ポテンシャルをもつ Gibbs 測度の場合、$\mu_{\mathbf{x}}$ は常に、元の測度 μ に対して、絶対連続になる。これは Ruelle クラスポテンシャルの可積分性から直ちに従う。しかし、Coulomb ポテンシャルでは、全く異なる現象が生じる。

Theorem 1. *Let* $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{\mathsf{m}}$ *and* $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{\mathsf{n}}$*, where* $\mathsf{m}, \mathsf{n} \in \{0\} \cup \mathbb{N}$*. Then the following holds.*
(1) *If* $\mathsf{m} = \mathsf{n}$*, then* $\mu_{\mathbf{x}}$ *and* $\mu_{\mathbf{y}}$ *are mutually absolutely continuous.*
(2) *If* $\mathsf{m} \neq \mathsf{n}$*, then* $\mu_{\mathbf{x}}$ *and* $\mu_{\mathbf{y}}$ *are singular each other.*

更に, $\mathsf{m} = \mathsf{n}$ のとき、Radon-Nikodym density は次の表示を持つ。

Theorem 2. *For each* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^{\mathsf{m}}$*, the Radon-Nikodym density* $d\mu_{\mathbf{x}}/d\mu_{\mathbf{y}}$ *is given by*

$$\frac{d\mu_{\mathbf{x}}}{d\mu_{\mathbf{y}}} = \frac{1}{Z_{\mathbf{xy}}} \lim_{r\to\infty} \prod_{|s_i|<b_r} \frac{|\mathbf{x} - s_i|^2}{|\mathbf{y} - s_i|^2} \tag{8}$$

compact uniformly in $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{\mathsf{m}}$ *for* $\mu_{\mathbf{y}}$*-a.s.* s*. Here* $\mathsf{s} = \sum_i \delta_{s_i}$ *and* $\{b_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ *is an increasing sequence of natural numbers. We use a convention such that* $|\mathbf{x} - s_i| = \prod_{m=1}^{\mathsf{m}} |x_m - s_i|$ *for* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{\mathsf{m}})$。*Moreover,* $Z_{\mathbf{xy}}$ *is the normalization given by* $Z_{\mathbf{xy}} = \lim_{\mathsf{n}\to\infty} Z^{\mathsf{n}}(\mathbf{x})/Z^{\mathsf{n}}(\mathbf{y})$*, where*

$$Z^{\mathsf{n}}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{C}^{\mathsf{n}}} \prod_{i=1}^{\mathsf{n}} |\mathbf{x} - s_i|^2 \prod_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{\mathsf{n}} |s_j - s_k|^2 \prod_{l=1}^{\mathsf{n}} g(s_l) ds_1 \cdots ds_{\mathsf{n}}. \tag{9}$$

The convergence in (8) *takes place compact uniformly in* $\mathbb{C} \times \mathbb{C}\backslash\{s_i\}_i$ *for* $\mu_{\mathbf{y}}$*-a.s.* $\mathsf{s} = \sum_i \delta_{s_i}$*.*

特異性を証明する鍵になるのは次の関数である。$D_q = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < \sqrt{q}\}$ $q \in \mathbb{N}$、

$$F_r(\mathsf{s}) = \frac{1}{r} \sum_{q=1}^{r} (\mathsf{s}(D_q) - q). \tag{10}$$

Theorem 3. $\mathbb{C}$ の配置空間を S とおく。$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{\mathsf{m}})$ に対して、

$$\lim_{r\to\infty} F_r(\mathbf{s}) = -\mathsf{m} \quad \textit{weakly in } L^2(\mathsf{S}, \mu_{\mathbf{x}}) \tag{11}$$

Remark 1. (a) (11) の右辺の極限は、Poisson 点過程では存在しない。これが存在するのは、Ginibre 点過程が「small fluctuation」を持つという、確率幾何的構造が重要な役割を果たしている。
(b) m は、条件付けた粒子の個数を表す。つまり、「$\infty - \mathsf{m}$」に意味を付けることができる。これは周期構造では当たり前で、逆に、Poisson ではあり得ない。(Poisson では Palm と元の測度は同一である)。そういう意味で、Ginibre 点過程は結晶構造に近い性質も持つ。Ginibre 点過程は、「ランダムな結晶構造」をもち、この m という指数の存在は、その反映と考えることができる。
(c) $\mathsf{m} = 1$ とする。(8) において、 絶対値の 2 乗をとる前の関数

$$\lim_{r\to\infty} \prod_{|s_i|<b_r} \frac{\mathbf{x} - s_i}{\mathbf{y} - s_i}$$

は $\mathbf{y}$ を固定すると、$\mathbf{x} = x$ の整関数（無限積）となる。この積も条件収束である。解析関数としての構造も興味深いと思われる。

参考文献

[1] Osada, H., *Infinite-dimensional stochastic differential equations related to random matrices*, Probability Theory and Related Fields (on line first).

[2] Osada, H., *Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic interaction potentials*, (preprint) available at “http://arxiv.org/abs/0902.3561” (arXiv:0902.3561v2 [math.PR]).