The convergence of the exploration process for critical percolation on the k-out graphs.

神戸大学大学院理学研究科数学専攻博士課程
太田陽喬

k-out グラフ上におけるパーコレーションに関する相転移について述べる．この相転移はランダムグラフやランダム正則グラフなどと同じく，臨界確率 p_c の前後で二段階に変化するという，”ダブルジャンプ”と呼ばれるものである．さらに，”スケーリングウインドウ”と呼ばれる臨界点 p_c 付近 $p = p_c(1+\lambda n^{-1/3})$（$\lambda$ は実数）において，連結成分のサイズの列が，あるドリフト付きブラウン運動の excursion の列に収束する．ランダムグラフ，ランダム正則グラフにおける結果は，それぞれ [1]，[2] を参照していただきたい．

n 個の頂点を持つ k-out グラフ $G_{\rm out}(n,k)$ の構成は，以下のようにして行われる．(i) 各頂点 v について，他の $n-1$ 個の点から k 個 $v_1,\dots,v_k$ を一様に選び，有向辺 $(v,v_1),\dots,(v,v_k)$ を結ぶ．これにより，有向グラフ $\vec{G}_{\rm out}(n,k)$ を得る．(ii) 各頂点間について，一方向でも有向辺が伸びているとき，無向辺を一本結ぶ．これによって得られる無向グラフを k-out グラフ $G_{\rm out}(n,k)$ と呼ぶ．

この k-out グラフ $G_{\rm out}(n,k)$ 上でパーコレーションを考える．すなわち，各辺に対して確率 p でそれを残し，確率 $1-p$ で取り除くという操作を行う．$G_{\rm out}(n,k)$ は，相転移確率 $\mathbf{p_c} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}+\sqrt{\mathbf{k^2-k}}}$ を持ち，この臨界点でダブルジャンプが起こる．以下詳しく見ていく．

$\mathcal{C}_j$ を j 番目に大きなサイズ（頂点数）を持つ連結成分，$|\mathcal{C}_j|$ を $\mathcal{C}_j$ のサイズとする．$p = \frac{c}{k+\sqrt{k^2-k}}$ とおく．

Theorem 1 (subcritical phase) $c<1$ のとき，十分大な A について，

$$\mathbf{P}\big(|\mathcal{C}_1| > A\log n\big) \to 0, \quad as\ n\to\infty.$$

Theorem 2 (supercritical phase) $c > 1$ のとき，十分小な $\delta > 0$ について，

$$\mathbf{P}\big(|\mathcal{C}_1| < \delta n\big) \to 0, \quad as\ n\to\infty.$$

さらに標準ブラウン運動 $\big\{\mathcal{B}(s) : s\in[0,\infty)\big\}$ について，

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^\lambda(s) \;&=\; \mathcal{B}\Big(2\big(k-\sqrt{k^2-k}\big)s\Big)\\ &\quad +2\big(k-\sqrt{k^2-k}\big)\lambda s - \big(\sqrt{k^2-k}-k+1\big)s^2\end{aligned}$$

でドリフト付きブラウン運動 $\mathcal{B}^\lambda$ を定義する．そして，$\mathcal{B}^\lambda$ の反射壁 W^λ を $W^\lambda(s) = \mathcal{B}^\lambda(s) - \min_{0\le s'\le s} \mathcal{B}^\lambda(s')$ とする．W^λ の excursion γ とは，W^λ が 0 の値をとる時刻の区間のことをいう．$(|\gamma_j|)_{j\ge1}$ を $|\gamma_1| \ge |\gamma_2| \ge \ldots$ を満たす excursion の長さの列とする．

Theorem 3 (critical phase) $c = 1$ のとき，

$$n^{-2/3} \cdot \left(|\mathcal{C}_j|\right)_{j\ge1} \stackrel{d}{\Longrightarrow} \left(|\gamma_j|\right)_{j\ge1}$$

が成り立つ，ここで，収束は l^2-*norm* に関するものである．

これらの結果から，臨界確率 p_c について，最大連結成分のサイズのオーダーが二段階に変化するという，ダブルジャンプが起こっていることが分かる．

これらの定理の証明は，exploration process X_t の解析によって得られる．これは，各時刻に一つの頂点を探索し，open edge でつながる頂点を数え上げる確率過程である．一つの連結成分の探索が終了するとき，X_t は最小値を更新する．よって，X_t の最小値の更新時刻区間の長さを調べることが，連結成分のサイズを求めることにつながる．特にスケーリングウインドウ $p = p_c(1 + \lambda n^{-1/3})$ 内においては，$\mathcal{B}^\lambda$ が X_t のスケーリング極限となるので，上記のような結果が得られるのである．

k-out グラフは，Watts-Strogatz モデル（WS モデル）と関係が深い．WS モデルは，スモールワールド性をもつ複雑ネットワークの代表モデルであり，この性質は多くの実ネットワークに現れている [3]．k-out グラフは，この WS モデルの極値，全ての辺の張り替えを行ったときのグラフモデルと非常に近い．また，パーコレーションの相転移確率は，ネットワークの堅牢さの指標の一つと考えられる．よって，この問題は実ネットワークの解析という観点からも，大きな意味がある．k-out グラフの解析が，WS モデルや複雑ネットワークの解析に役立つことを期待している．

参考文献

[1] D.Aldous, Brownian excursions, critical random graphs and the multiplicative coalescent, Ann Probab 25, 812-854, (1997).

[2] A.Nachmias, Y.Peres, Critical Percolation on Random Regular Graphs, Random Struct Algorithms 36, 111-148, (2010).

[3] D.J.Watts, S.H.Strogatz, Collective dynamics of 'small-world' networks, Nature, v393, n6684, 440-442, (1998).