飛躍のある非退化確率微分方程式とその準楕円性

國田　寛[1]

次の $\mathbf{R}^d$ 上の飛躍のある非定常確率微分方程式を考える.

$$(1)\quad d\xi_t = b(\xi_{t-},t)dt + \sigma(\xi_t,t)dW(t) + \int_{\mathbf{R}_0^m} g(\xi_{t-},t,z)\{N(dtdz) - dt\nu(dz)\}.$$

ここで $W(t)$ は m-次元標準ブラウン運動, $N(dtdz)$ は $W(t)$ と独立な $\mathbf{R}_0^m = \mathbf{R}^m - \{0\}$ 上のポアソンランダム測度, ν はそのレビー測度である. 係数 $b(x,t) = (b^i(x,t))$, $\sigma(x,t) = (\sigma^{ij}(x,t))$, $g(x,t,z) = (g^i(x,t,z))$ は x に関して滑らかでそれらの x に関する微分は有界関数であるとする. 本講演ではレビー測度 ν は任意の次数のモーメントを持ち, かつオーダー条件を満たすことを仮定する.

方程式は唯一解を持つ. 解は飛躍のある拡散過程であり, その生成作用素は

$$(2)\quad A(t)\varphi = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a^{ij}(x,t)\varphi_{ij} + \sum_i b^i(x,t)\varphi_i + \int_{\mathbf{R}_0^m} \{\varphi(x+g(x,t,z)) - \varphi(x) - \sum_i g^i(x,t,z)\varphi_i(x)\}\nu(dz)$$

と書ける. ただし $a^{ij}(x,t) = \sum_k \sigma^{ik}(x,t)\sigma^{jk}(x,t)$.

本講演では方程式 (1) が**非退化ならば準楕円性を持つ**こと及び, ある種の**Hörmander 条件を満たす方程式は非退化**であることを示したい. まず非退化な方程式を定義しよう. 時刻 s に点 x を出る方程式の解を $\xi_{s,t}(x)$ とする. $s < t$ を固定したとき, 任意の $N > 0$ に対し確率ベクトル系 $\{\xi_{s,t}(x); |x| \le N\}$ が一様に非退化, すなわち $\xi_{s,t}(x)$ の Malliavin covariance $\Pi(x)$ が可逆かつ

$$\sup_{|x|\le N}\ \sup_{v\in S_{d-1},\mathbf{u}\in A(1)^k} E[(v^T\Pi(x)v)^{-p}\circ\epsilon_{\mathbf{u}}^+] < \infty, \quad \forall p > 1$$

を満たすとき, 方程式は非退化であるという ([1],[2]).

つぎに準楕円性の定義を与える. 確率微分方程式 (1)（またはその生成作用素 (2)) が次の性質 1,2 を持つとき, 準楕円性を持つという.

1.　任意の有界滑らかな関数 $c(x,t)$ に対して, 重み付き推移作用素

$$P_{s,t}^c\varphi(x) := E\Big[\exp\Big\{\int_s^t c(\xi_{s,u}(x))du\Big\}\varphi(\xi_{s,t}(x))\Big]$$

は緩増大滑らかな関数 φ より Schwartz の緩増大超関数 Φ にまで拡大できる. 拡大した関数 $u(x,s) = P_{s,t}^c\Phi(x)$ は (x,s) に関して $\mathcal{C}^{\infty,1}$-級であり, つぎの Kolmogorov の後ろ向き方程式を満たす.

$$(3)\qquad (\frac{\partial}{\partial s} + A(s) + c(x,s))u(x,s) = 0.$$

2.　$T > 0$ を固定する. f を連続な緩増大関数とすると, 終期条件

$$\lim_{s\uparrow T} u(x,s) = f(x)$$

[1] hkunita@amber.plala.or.jp

を満たす方程式 (3) の緩増大 $C^{\infty,1}$-級解はただ一つ存在する．解は $u(x,s) = P^c_{s,T}f(x)$ で与えられる．さらに関数 $p(s,x;t,y) := P^c_{s,t}\delta_y(x)$ はコーシー問題の基本解, すなわち次の性質を持つ．

i) 任意の t, y に対し, それは (x,s) の $C^{\infty,1}$-関数で

$$(\frac{\partial}{\partial s} + A(s)_x + c(x,s))p(s,x;t,y) = 0, \quad 0 < s < t, x \in \mathbf{R}^d$$

をみたす．

ii) 任意の $x, s < t$ に対し, それは y に関して急減少な C^∞-関数で, 任意の有界連続関数 f に対して $P^c_{s,t}f(x) = \int p(s,x;t,y)f(y)dy$ を満たす．

定理 1．非退化確率微分方程式は準楕円性を持つ．

次にどのような方程式が非退化となるかを調べる．$\rho > 0$ にたいし $B_\rho = (\int_{|z|\le\rho} z_i z_j \nu(dz)/\int_{|z|\le\rho}|z|^2\nu(dz))$ とおく．B はある $\rho_0 > 0$ にたいし $B \le B_\rho, 0 < \rho < \rho_0$ をみたす非負対称行列とする．g に対応して $\tilde\sigma^{ij}(x,t) = \partial_{z_j} g^i(x,t,z)|_{z=0}$, $\tilde\sigma(x,t) = (\tilde\sigma^{ij}(x,t))$ ($d \times m$-行列) とおいて行列

$$C(x,t) := \sigma(x,t)\sigma(x,t)^T + \tilde\sigma(x,t)B\tilde\sigma(x,t)^T$$

を定義する．

定理 2．すべての x, t で $C(x,t)$ が正定値ならば方程式は非退化である．

$C(x,t)$ が必ずしも正定値でなくても準楕円性を持つ場合がある．$\sigma(x,t)$ と $\tilde\sigma(x,t)$ に対し時間に依存するベクトル場を

$$\begin{aligned} V_j(x,t) &= \sigma^{\cdot j}(x,t), \quad j = 1,...,m, \\ \tilde V_j(x,t) &= \sum_k \tilde\sigma^{\cdot k}(x,t)\tau_{kj}, \quad j = 1,...,m, \end{aligned}$$

によって定義する．ただし (τ_{kj}) は行列 B の非負対称平方根行列．さらに時間に依存するベクトル場を

$$V_0(x,t) = b(x,t) - \frac{1}{2}\sum_{l,j}\frac{\partial\sigma^{\cdot j}(x,t)}{\partial x_l}\sigma^{lj}(x,t) - \lim_{\delta\to 0}\int_{|z|>\delta} g(x,t,z)\nu(dz)$$

によって定義する．$\Sigma_0 = \{V_j, \tilde V_j; j = 1,...,m\}$ とおき, $k = 1,2,...$ にたいして

$$\Sigma_k = \{V_t(t)+[V_0(t),V(t)], [V_j(t),V(t)], [\tilde V_j(t),V(t)];\ j = 1,...,m, V(t) \in \Sigma_{k-1}\},$$

とおく．

（時間に依存する）強 Hörmander 条件：すべての点 x, t で $\cup_{k=0}^{n_0}\Sigma_k$ は $\mathbf{R}^d$ を張るような $n_0 \in \mathbf{N}$ が存在する．

定理 3．強 Hörmander 条件をみたせば非退化である．

文献

[1] Ishikawa, Y. and Kunita, H. (2006) Malliavin calculus on the Wiener-Poisson space and its application to canonical SDE with jumps, Stochastic processes and their applications 116, 1743-1769.

[2] Kunita, H. (2011) Analysis of nondegenerate Wiener-Poisson functionals and its applications to Itô's SDE with jumps, Sankhya, The Indian Journal of Statistics, 73-A, Part 1, 1-45.

[3] Kunita, H. (2011) Chain rules for Lévy flows and Kolmogorov equations for associated with jump-diffusions, In New Trend in Stochastic Analysis and Related Topics, ed. by H. Zhao, World Scientific, Singapore, 2011.