Quenched invariance principle for simple random walk on discrete point processes

久保田　直樹 (日大理工)*

今回, discrete point process 上のシンプルランダムウォークにおける quenched invariance principle について研究を行った．Discrete point process 上のシンプルランダムウォークは [3] で導入されたモデルで, $\mathbb{Z}^d$ 上のランダムな集合を頂点集合として持ち, さらに各座標軸に平行なライン上の最も近くにある 2 点を繋いでできる線分の集まりを辺集合として持つようなランダムグラフ上を動くシンプルランダムウォークのことである．ランダム媒質中のランダムウォークに関する quenched invariance principle の成立については, ある方向に対してドリフトを持っているようなランダム媒質中のランダムウォークや, パーコレーションクラスター上のランダムウォークの場合には既に知られている．(例えば, [1] や [2] 参照.) 今回, discrete point process 上のシンプルランダムウォークにおける quenched invariance principle の証明で用いた主な手法は, ランダムウォークをマルチンゲール部分と "corrector" と呼ばれる関数の部分の和に分解し, corrector 部分を適切に評価することでマルチンゲールの functional CLT に帰着させるというものである．この手法は, パーコレーションクラスター上のランダムウォークに対する quenched invariance principle を扱った論文 [2] に基づいたものである．そこでは, corrector 部分を評価するためにパーコレーションクラスターに対する様々な評価を用いている．今回扱うモデルはパーコレーションクラスターとは構造が大きく異なるグラフ上でランダムウォークを考えているため, [2] で用いられている評価を直接には適用することができない．しかし, discrete point process が finitely dependent かつ定常的であれば corrector 部分に対する適切な評価を得ることができて, quenched invariance principle が達成されることが分かった．

最後に, 今回扱うモデルと結果についてより詳しく説明する．$\Omega := \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ とし確率空間 $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{Q})$ とその上の標準的なシフト $(T_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ を考える．ここで, $\mathcal{G}$ は Ω 上の標準的直

* kubota@grad.math.cst.nihon-u.ac.jp

積 σ-加法族とし, 確率測度 $\mathbb{Q}$ は次の条件を満たすと仮定する:

(A1) $0 < \mathbb{Q}(\Omega_0) < 1$, ここで $\Omega_0 := \{\omega \in \Omega; \omega(0) = 1\}$,

(A2) ある定数 $\ell > 0$ が存在して, $A, B \subset \mathbb{Z}^d$ が $\inf\{|x-y|; x \in A, y \in B\} \geq \ell$ を満たすならば $\sigma(\omega(x); x \in A)$ と $\sigma(\omega(x); x \in B)$ は $\mathbb{Q}$ の下で独立である,

(A3) $\mathbb{Q}$ は $(T_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}$ に関して定常である.

このとき, $\mathbb{P} := \mathbb{Q}(\cdot|\Omega_0)$ とする. また, $\omega \in \Omega$ に対して $\mathcal{N}_x(\omega)$ を点 x の各座標軸方向にある最も近い $2d$ 個の点の集合とする. 固定した $\omega \in \Omega$ に対して, discrete point process 上のシンプルランダムウォークとは次で定義される $\mathbb{Z}^d$ 上のマルコフ連鎖 $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ のことである: $P_\omega^0(X_0 = 0) = 1$ かつ, 各 $x \in \{y \in \mathbb{Z}^d; \omega(y) = 1\}$ に対して

$$P_\omega^0(X_{n+1} = y | X_n = x) = \begin{cases} 0 & , y \notin \mathcal{N}_x(\omega), \\ \frac{1}{2d} & , y \in \mathcal{N}_x(\omega). \end{cases}$$

この設定の下で, 以下の結果が得られた:

Theorem 1 各 $t \geq 0$ に対して,

$$B_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} \left(X_{\lfloor tn \rfloor} + (tn - \lfloor tn \rfloor)(X_{\lfloor tn \rfloor + 1} - X_{\lfloor tn \rfloor}) \right)$$

と定義する. このとき, $T > 0$ に対して, $\mathbb{P}$-a.s. ω で $(B_n(t))_{0 \leq t \leq T}$ の P_ω^0 の下での分布は d-次元ブラウン運動の分布に弱収束する.

References

[1] Marek Biskup and Timothy M. Prescott. Functional CLT for random walk among bounded random conductances. *Electron. J. Probab.*, Vol. 12, pp. no. 49, 1323–1348, 2007.

[2] Firas Rassoul-Agha and Timo Seppäläinen. Almost sure functional central limit theorem for ballistic random walk in random environment. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, Vol. 45, No. 2, pp. 373–420, 2009.

[3] Ron Rosenthal. Random walk on discrete point processes. `http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1005/1005.1398v1`, 2010.