ブラウン運動と確率解析、デリバティブ

私の専門は確率解析とその応用にありますが、確率解析とはなにかその基本となるブラウン運動と確率微分方程式を説明しましょう。その後、数理ファイナンスでのオプションの価格付の話を紹介します。

1　ブラウン運動の研究：物理化学の面から

R.Brown (1828)

花粉を水に落す。花粉は、水を吸い、ふくらんで、砕けてたくさんの微粒子が飛びだしそれらが非常に不規則な複雑な運動をするのを英国の植物学者 Robert Brwon は観察した。**生命現象のあらわれか?** と思われたが、そうではなく無機物でも同様な現象が観察され、このような不規則運動はブラウン運動とよばれるようになった。

$\Longrightarrow$**Brown 運動の発見**

• なぜ、複雑な運動をするのか?

答：花粉の微粒子にくらべはるかに小さな熱運動する水分子が短時間に非常に多くの回数全く不規則に衝突するため。

したがって、時刻 t での微粒子の位置は全く予測できず時間とともにランダムに変動する量、**確率過程** (X, Y, Z 軸方向の 3 つの成分をもつ) と考えられる。

じつは、このブラウン運動の研究は**分子の存在**に関して強い証拠を提出することになる。

(1900 年ごろはまだ根強く原子、分子の存在に関して疑問を投げ掛ける人がいた!)

その研究は、Einstein の仕事のひとつである。

A.Einstein (1905) 水、花粉の微粒子などが分子から構成されているとする分子論の立場から、

微粒子の時刻 t での位置 $x(t)$ が一定方向
(X 軸) への成分が区間 $[a,b]$ にある確率

$$=\int_a^b \frac{1}{\sqrt{4\pi tD}}\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)dx.$$

すなわち、平均 0, 分散 $2Dt$ の正規分布 ($N(0,2Dt)$ と表す、**数学 C** ででて来ます!) にしたがうことを示した。

ここで、

$$D=\frac{kT}{6\pi\eta a}. \tag{1}$$

a : 微粒子の半径
T : 水の絶対温度
η : 粘性係数
k : Boltzmann 定数 ($=\frac{R}{N}$),
R : 気体定数 ($= 8.31\mathrm{J}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$)
N : アヴォガドロ数 (=1mol の物質の含む分子数) 現在は $N \fallingdotseq 6.023\times 10^{23}$ と知られている。

$x(t)$ の 2 乗の平均値は $2Dt$(分散と同じ), すなわち、

$$E[x(t)^2]=2\frac{kT}{\zeta}. \tag{2}$$

簡単のため、$\zeta=6\pi a\eta$ とした。だから微粒子の運動を観測して $x(t)^2$ の標本平均を求めればそれが $2Dt$ になる。a, η, T を求めておけば、式 (1) からアヴォガドロ数 N が求まることになる。以上がアインシュタインによる N の求め方のアイデアである。実際この方法で、1914 年, Nordlund が $N=5.91\times 10^{23}$, Fletsher が $N=6.03\times 10^{23}$ などと計算している。他に単位電荷の決定、放射能で崩壊するラジウムの寿命、発生するヘリウムなど他の原子論・分子論にもとづく全く異なる方法で計算してもほぼ同じ数のアヴォガドロ数が導かれることがわかった。この結果、原子、分子の存在に懐疑的な人の間でもその存在が信じられるようになった。

アインシュタインは花粉微粒子に対する力学的な考察ではなく、多数の花粉微粒子に対する統計的考察から上の関係式を出したが、Paul Langevin はひとつの微粒子に水分子の熱運動によるランダムな外力が働くという運動方程式からアインシュタインの結果を導いた。

2 物理から数学へ

P. Langevin (1908)

$x(t)$ を微粒子の時刻 t での位置のある軸方向の成分とする．Langevin は $x(t)$ が、つぎの Newton の運動方程式をみたすと考えた。

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\zeta\frac{d}{dt}x(t) + f(t) \tag{3}$$

m は微粒子の質量, $\zeta = 6\pi a\eta$, $f(t)$ は水分子の熱運動によるランダムな外力。$-\zeta\frac{d}{dt}x(t)$ は水の中をうごいていることからそれにより微粒子に働く抵抗の力である。

(注) 運動方程式は

$$ma = F$$

a は質点の加速度 (=すなわち $x(t)$ の 2 回微分, $\frac{d^2}{dt^2}x(t)$) F は質点に働く外力であることを思いだしてほしい。(3) は外力 F を水の粘性抵抗の項とランダムな外力の項 $f(t)$ にわけて書いている。(3) は、この未知の外力が与えられたとして (3) をみたす未知の関数 $x(t)$ をみたすものを求めなさいという式で、**微分方程式**とよばれるもののひとつです。

Langevin はランダムな外力 $f(t)$ がつぎの性質をもつと考えた。

1. (重力の影響を無視して) 媒質の等方性から $f(t)$ の平均は 0.
2. $t \neq t'$ ならば $f(t)$ と $f(t')$ は、独立な確率変数

3. 微粒子は動くが媒質である水の性質は変らないから、$f(t)$ と $f(t')$ は同じ分布をもつ確率変数

この仮定のもとで、Langevin は

$$E[x(t)^2] = \frac{2kT}{\zeta}t. \tag{4}$$

となることを示した。しかし、(3) の厳密な取扱は伊藤清の**確率積分、確率微分方程式**の理論を待たねばならなかった (1942, 大阪大学数学誌上談話会に発表). 伊藤清氏はその業績により今年, 文化功労者に選ばれた。Newton は彼の力学の構築で大きな功績を残したが、伊藤氏の業績はランダムな現象の解析に Newton 力学に匹敵する強力な手法をもたらしたと言われています。

それを紹介するため、(3) を

$$v(t) = m\frac{d}{dt}x(t) \quad \text{(運動量)}$$

に関する式に直すと

$$\frac{d}{dt}v(t) = -\zeta v(t) + f(t) \tag{5}$$

さらに $w(t) = \int_0^t f(s)ds$ なる関数を導入し書き変えると

$$\frac{d}{dt}v(t) = -\zeta v(t) + w'(t) \tag{6}$$

となる。ここで、$w(t)$ がどんなランダムな量か明らかにするために、**数学 C** で学ぶ次の事実を思いだそう。(教科書によって述べ方が違いますが本質は同じです).

Theorem (“中心極限定理” と言う名前がついてます)
次の約束に従い整数上を動くランダムな運動を考える。

1. 最初は 0(原点) にいる。
2. n ステップ目に x という位置にいると, $n+1$ ステップ目に $x-1$, $x+1$ にそれぞれ $\frac{1}{2}$ の等確率で動く。

この運動の n ステップ目の位置 S_n は次のように表されるだろう。

$$S_n = X_1 + \cdots X_n$$

と表される。ただし、X_n は次の独立な試行できまる確率変数である。表、裏が等確率で出るコインを投げて
表が出たら $X_n = 1$
裏が出たら $X_n = -1$
とする。
このとき、定理の結論は、確率変数 $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ の分布は標準正規分布 $N(0,1)$ に近づいていくことである。

この定理の要点は、

互いに独立な小さなランダムな要因 (上の定理では $\frac{X_i}{\sqrt{n}}$) が足されるとそれはだいたい正規分布にしたがう確率変数になると思ってよい

ということです。ただし、X_i を定数倍すると分散は 1 ではなく他の値に変ります。

$$w(t) = \int_0^t f(s)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{it}{n}\right)\frac{t}{n}$$

は互いに独立な平均 0 の確率変数を足しあわせた極限だから中心極限定理より
(1) $w(t)$ **はやはり正規分布にしたがう**

ことがわかる。また、

(2) $w(t)$ は $f(t)$ を積分している関数だから t とともに連続に変動する

また、$0 < u < s < t$ のとき、

$$w(t) - w(s) = \int_s^t f(v)dv \tag{7}$$

$$w(s) - w(u) = \int_u^s f(v)dv \tag{8}$$

のように互いに独立な確率変数の和になっているから、

(3) $w(t) - w(s)$ と $w(s) - w(u)$ は独立である

と考えられる。

上の性質 **(1),(2),(3)** をみたすランダムに変動する量 (確率過程)$w(t)$ を Wiener 過程といいます。数学の方では、むしろこの Wiener 過程の方をブラウン運動とよぶのが普通です。

伊藤清は (6) の係数をより一般な関数 $a(x), b(x)$ に変えたつぎの方程式 (確率微分方程式) を考えた。$v(t)$ を $x(t)$ と書く事にしましょう。

$$\frac{d}{dt}x(t) = b(x(t)) + a(x(t))w'(t) \tag{9}$$

確率解析の習慣では $dw(t) = w'(t)dt$ と考えて、

$$dx(t) = b(x(t))dt + a(x(t))dw(t) \tag{10}$$

と書くのがふつうです。$x(t)$ は $w(t)$ を与えると決まる量ですから、ランダムな量、確率変数になります。関数 f の中に $x(t)$ を代入して平均を計算したものを $u(t,x)$ としましょう。すなわち、

$$u(t,x) = E[f(x(t))]$$

x は $x(t)$ の初期値 $x(0)$ の値とします。すると $u(t,x)$ は次の微分方程式 (偏微分方程式とよばれます) をみたすことがわかります。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) &= \frac{a(x)}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)+b(x)\frac{\partial}{\partial x}u(t,x) \quad (11)\\ u(0,x) &= f(x) \quad (12)\end{aligned}$$

この方程式は熱方程式とよばれます。長い針金を想像して下さい。その位置xにおける時刻0での温度を$f(x)$とすると位置x時刻tでの温度$u(t,x)$が上の方程式にしたがうのです。a,bは針金の材質により変わります。このように、確率微分方程式は熱方程式の研究にも有用です。

このような確率微分方程式、Wiener過程を用いた解析を確率解析といいます。

(注)　これまで、$f(t)$がtの関数であるかのように書いてきましたが、皆さんが知っているような関数ではなく、強いていえば、一般化された関数(超関数)とよばれるものの１種です。実際、Wiener過程$w(t)$は上の(1)-(3)をみたすtの関数ですが、$w(t)$はtの微分可能な関数ではありません。したがって、(6), (9), (10)には、きちんとした意味を与える必要がありますが、それが、伊藤清によりなされたというわけです。

私自身の主な興味は確率解析を幾何、解析に応用したりすることにあります。最近の関心は場の量子論における古典極限の問題の数理的構造の解明に確率解析を用いることにあります。ホームページ

http://www.sigmath.es.osaka-u.ac.jp/~aida/index-j.html

を御覧下さい

最後にデリバティブの話をしましょう。

1. Introduction

デリバティブとはなにか？

- 派生したもの
- 金融派生商品

株券、国債、社債などの証券から派生してできた証券の一種で株などと同じように売り買いできるもの. オプションと呼ばれるものもある.

オプションとは？

● オプション (option) 「証券 (株など) をある数、ある値段である期日に売るあるいは買うことのできる権利」という証券. 正確には扱っているその株式の上に書かれたオプションという. これはあくまでも権利であって損をするようなときは行使する必要はない.

例えば、

問 0　1 期間後に

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & 150\text{円} \\ 100\text{円} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & 90\text{円} \end{tikzcd}$$

と上昇、下落する可能性がある株と利率が 1 割の国債のみの市場を考える. この株の上に書かれた次のコールオプション C の第 0 期現在の値段 (プレミアム、premium と呼ばれる) はいくらになるだろうか？

「1 期間後にこの株を 1 株 120 円で 22 株買う権利」

2. 用語

基本的な用語について説明する。

$$\text{証券 (security)} \begin{cases} \bullet\text{株式} & \text{(stock)} \\ \bullet\text{債券} & \text{(bond)} \\ \bullet\text{オプション} & \text{(option)} \end{cases}$$

● 債券とは： 利率が 0 以上の絶対安全な (リスクの無い) 証券の事である。国債、社債などがある。

● 株式とは： 上昇、下降などランダムに変動する。有名な Black-Scholes モデルなどにも採用されているように時刻 t での株価 $S(t)$ が Wiener 過程と呼ばれる確率過程 $w(t)$ を用いて

$$S(t) = \exp(\lambda t + \sigma w(t))$$

と書かれると仮定する事が多い。

実は逆に株価のランダムな動きを数学的にモデル化しようとして Bachelier という人によりブラウン運動とよばれる確率過程の概念が生まれてきたといえる。数学的なブラウン運動の定義の起源がアインシュタインらの統計物理学とともに経済学にあるのは面白いことです。

もちろん $S(t)$ の動きが予測できたら億万長者になるのは間違いないが、それは不可能である。数理ファイナンスと呼ばれる分野は $S(t)$ の予測をして儲けようという学問ではない。

• 空売り　株、債券、オプション等を空売りするなどという。これは証券のマイナスの保有と同じである。また一定の正の利率の債券を空売りするというのはその利率で借金するということと同じになる。このように負の保有を許すと問 0 の状況で 500 円資金があるとき, 株価が変動する前はどのように資産を持てるかと言うと

(1) 国債 -1000 円の保有, 株 15 株の保有

(2) 国債 200 円の保有, 株 3 株の保有

などが可能となる。(1) のケースは国債を空売りして得た 1000 円と手持ちの 500 円で株を 1500 円分買ったことになる.

• 以下では取り引き費用は無し、とする。また、常に空売りでき、株、債券は売れる、あるいは買えるとする。すなわち売り買いしたくても相手がいないあるいはその株がないことはないとする。

• 以下では持っている資金はすべて証券につぎこんでいるとする。その資産を証券の変動を見ながら, 売り買いしていき、親の仕送りのような無償の収入はないとする (自己充足的戦略, self-financing strategy).

3. オプションの価格付けの簡単な例

問 0 の解答を考えよう。

解答　無裁定(no arbitrage)のアイデアを用いて解く。価格を決めるにあたっては、株価が上昇しやすいか、下落しやすいかは関係がないことを注意してほしい。さてまず、

ケース(1)が起こるときこのオプションの価値は権利を行使するから、

$$(150-120)\times 22 = 660\,\text{円}$$

の価値がある。

ケース(2)が起こると、権利は行使しないから、0円となる。

ここで、仮に最初に国債をx円、株をy円保有して(1), (2)のいずれのケースでもこのオプションと同じ価値を生むようにするには

$$\begin{aligned} 1.1x+1.5y &= 660 \\ 1.1x+0.9y &= 0 \end{aligned}$$

を解いて$x=-900, y=1100$となる。つまり債券を900円分空売りし、株を1100円分購入することになる。これを実行するためには、$1100-900=200$円必要である。従って、このオプションの価値は200円となる。200円でなければ、

「所持金0円から出発しても適当に債券、株を売り買いすると必ず損はせず正の利益を得る機会」(=裁定機会, arbitrage opportunityという)

がある.

それを説明しよう. オプションの値段をPとする.

(I) $P>200$のとき,

資金0円を上の連立方程式を解いて得られたように資金を分配する.

債券を900円分空売り ⋯⋯ -900円

株を1100円分購入 ⋯⋯ 1100円

オプションCを空売り ⋯⋯ $-P$円

手元に ⋯⋯⋯⋯ $P-200$円残す.

すると(1)が起こると、手元の資産以外は

$$-900 \times 1.1 + 1100 \times 1.5 - 660 = 0\,円$$

となるが, 手元にある分だけ特をしていることになる.

(2) がおこっても同様に手元にある分の $P - 200$ 円だけ得をすることになる.

(II) $P < 200$ のとき,

債券を 900 円分購入 ······· 900 円

株を 1100 円分空売り ······· -1100 円

オプションを購入 ······· P 円

手元に ············· $200 - P$ 円残す.

というように資産 0 円を分割するとする. すると (1) が起こると, 手元の資産以外は

$$900 \times 1.1 - 1100 \times 1.5 + 660 = 0\,円$$

となる. 従って手元に残してある分だけ得をすることになる. (2) がおこっても同様である.

結局, 資金 0 から出発しても $P \neq 200$ ならばリスク無く金儲けができることになる. このようなうまい話があっては困るので, 0 期の値段は 200 円と決まる.

時間が連続のときの有名なモデル Black-Scholes モデルを紹介しよう.

7. 連続時間モデル

上で考えたモデルは１期間で株価が上昇、下落する単純なモデルでしたが、この期間を n 期間としその時間間隔 δt を小さくする極限をとることにより、連続的に株価が変動するモデルを導き出すことができる.

前に述べた中心極限定理とよばれる確率論の定理を用いると株価 S_t は次のようになることがわかる. 連続モデルでは債券の値段 ρ_t も次の規則にしたがって変動するのが妥当となる. このときはもちろん株価は連続的変わりいろいろな値を取る可能性がある.

$$\begin{aligned} \rho_t &= \rho_0 e^{rt} \\ S_t &= S_0 \exp\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + w(t)\right) \end{aligned}$$

ここで r は瞬間利子率, μ は期待収益率, σ はボラティリティとよばれる. $w(t)$ は Wiener 過程である。

このようなブラウン運動で株価が変動すると仮定されているモデルは Black-Scholes モデルとよばれる. F.Black はすでに他界しているが, M.Scholes はやはり数理ファイナンスの大家 R.C.Merton と 1997 年にノーベル経済学賞を受賞した.

満期の時間 T でこの株を一株 K 円で買えるというオプション (ヨーロピアンオプション) の価格 P は上記の Black and Scholes により無裁定の原理にもとづいて次のように求められた。

定理

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \int_{\log(K/S)-rT}^{\infty} (Se^x - Ke^{-rT}) \exp\left(-\frac{(x + \frac{1}{2}\sigma^2 T)^2}{2\sigma^2 T}\right) dx$$

参考文献

1. 「物理学の視点」　江沢洋著, 培風館

私が大学 2 年のときに買った本。今回の物理化学サイドのブラウン運動の話の種本。量子力学についても書いてあって面白い本です。

2. 「ファイナンスの確率解析入門」,　藤田岳彦著、講談社

ファイナンスと確率解析の入門書。