対数ソボレフ不等式について

会田 茂樹

東京大学大学院数理科学研究科

2018 年 12 月 5 日

ソボレフの不等式

$f \in C^1(\mathbb{R})$, $f(x) = 0 \quad (\exists R > 0$ s.t. $|x| \geq R)$ のとき,

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

なぜなら, $y < \min(-R, x), z > \max(R, x)$ のように y, z を取ると

$$\begin{aligned} 2|f(x)| &= |f(z) - f(x)| + |f(x) - f(y)| \\ &= \left|\int_x^z f'(t)dt\right| + \left|\int_y^x f'(t)dt\right| \\ &\leq \int_x^z |f'(t)|dt + \int_y^x |f'(t)|dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|dt. \end{aligned}$$

$f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < n$ のとき,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{\frac{np}{n-p}} dx \right)^{\frac{n-p}{np}} \le C(n,p) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(Df)(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

$p > n$ のとき,

$$\sup_{x,y \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^{1-\frac{n}{p}}} \right\} \le C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(Df)(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

ここで,

$$(Df)(x) = (\partial_{x_1} f(x), \ldots, \partial_{x_n} f(x)),$$

$$|(Df)(x)| = \left(\sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} f(x))^2 \right)^{1/2}.$$

対数ソボレフ不等式

$f \in C^1(\mathbb{R}),\ f(x) > 0,\ \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$ とすると

$$\text{(1)}\quad \exp\left(2\int_{\mathbb{R}} f(x)\log f(x)dx\right) \le \frac{1}{2\pi e}\int_{\mathbb{R}} \frac{f'(x)^2}{f(x)}dx,$$

$$\text{(2)}\quad \int_{\mathbb{R}} f(x)\log f(x)dx \le \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{f'(x)^2}{f(x)}dx - \frac{1}{2}\log\left(2\pi e^2\right)$$

(1) は Stam の不等式 (1959), (2) は Gross の不等式 (1975) であり, (1), (2) は同値な内容の不等式である.
実際は Gross は次の形 (3) の対数ソボレフ不等式を証明した.

$u \in C^1(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} u(x)^2 d\mu(x) = 1$ のとき,

$$\text{(3)} \quad \int_{\mathbb{R}} u(x)^2 \log u(x)^2 d\mu(x) \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |u'(x)|^2 d\mu(x).$$

ここで, $d\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

- ソボレフの不等式 : 偏微分方程式などの解析
- Stam の不等式: エントロピーとフィッシャー情報量との関連
- Gross の不等式 : 場の量子論における Nelson の仕事 (Ornstein-Uhlenbeck 半群の超縮小性に関連した仕事)

この講義の内容

- $A : n \times n$ 行列
- 微分方程式

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t), \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^n$$

  の解は 行列 e^{tA} を用いて $u(t) = e^{tA}u_0$ と書ける.
- 明らかに解 $u(t)$ あるいは 行列 e^{tA} の性質は A により決まる.
- ${}^tA = -A \Longrightarrow e^{tA}$: 直交行列 (Lie 環と Lie 群)
- A 対称行列で固有値がすべて負ならば $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$

A：関数空間 $L^2(X, m)$ 上の作用素 (例えば,
$A = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ など)

(A) A に対する条件 (対数ソボレフ不等式)

$$\int_X f^2 \log f^2 dm \le \alpha \int_X (-Af)(x) f(x) dm + \beta \int_X f^2 dm + \|f\|_{L^2(X,m)}^2 \log \|f\|_{L^2(X,m)}^2$$

(B) $T_t = e^{tA}$ の超有界性 (hyperbounded, superbounded, ultrabounded):

$$T_t : L^q(X, dm) \to L^p(X, dm) \quad q < p \le +\infty$$

は有界線形作用素

(A) と (B) は深い関係にある. その話を紹介する.

話の順番

1. 対数ソボレフ不等式と半群の超縮小性
2. Heat kernel (熱核) の評価
3. 対数ソボレフ不等式の証明

A の例

- $X = \mathbb{R}^n$
- $\varphi : \mathbb{R}^n$ 上の滑らかな関数で $dm(x) = e^{-\varphi(x)}dx$.
- $a(x) = \left(a^{ij}(x)\right)_{1\leq i,j\leq n}$ は正定値対称行列で $C > 0$ が存在して，任意の $\xi = (\xi_i) \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq C|\xi|^2.$$

さらに $a^{ij}(x)$ は x の C^∞ 関数とする．

$L^2(\mathbb{R}^n, m)$ 上の作用素 A を

$$(Af)(x) = \sum_{1\le i,j\le n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a^{ij}(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right) - \sum_{1\le i,j\le n} a^{ij}(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x), \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

と定める.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{1\le i,j\le n} a^{ij}(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\frac{\partial g}{\partial x_j}(x)e^{-\varphi(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} (-Af)(x)g(x)e^{-\varphi(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} (-Ag)(x)f(x)e^{-\varphi(x)}dx$$

が成立する.

すなわち, A は対称 (実は自己共役作用素):

$$(Af, g)_{L^2(\mathbb{R}^n,dm)} = (f, Ag)_{L^2(\mathbb{R}^n,dm)}.$$

$T_t = e^{tA}$ が $L^2(\mathbb{R}^n, dm)$ 上の有界線形作用素で縮小半群となる. ただし, $T_0 = I$ とおく. $f \in L^2(\mathbb{R}^n, m)$ に対して, $u(t,x) = (T_t f)(x)$ とおくと $u(t,x)$ は次の放物型方程式の解になる.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = Au(t) \qquad t > 0,$$
$$u(0,x) = f(x).$$

T_t が超有界作用素 (ultrabounded linear operator) であることが示されれば, 熱核 $p(t,x,y)(\geq 0)$ が存在して

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} p(t,x,y)f(y)dm(y)$$

と書け,

$$\mathrm{esssup}_{x,y}\ p(t,x,y) < \infty$$

がわかる. ここで、L^p ノルム, 作用素ノルム, 縮小半群, 超有界性の意味を説明する.

ノルム空間, 連続線形作用素

$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 E とその上の関数 $\rho : E \to [0, \infty)$ の組 (E, ρ) で以下を満たすものをノルム空間という. ($\rho(x) = \|x\|$ と書く)

- $\rho(x) = 0 \iff x = 0$.
- $\rho(\alpha x) = |\alpha|\rho(x)$ $(\alpha \in \mathbb{R}, x \in E)$.
- $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

$d(x, y) = \|x - y\|$ とおくと d は E 上の距離になる. (E, d) が完備のとき, $(E, \|\ \|)$ をバナッハ空間という.
$(E_1, \|\ \|_1), (E_2, \|\ \|_2)$ をノルム空間とする. 線形写像 $T : E_1 \to E_2$ が位相空間の間の写像として連続の時, 連続線形作用素という.
以下で考えるノルム空間 (バナッハ空間) は $\mathbb{R}^n$ 上の L^p 空間である.

L^p ノルムの定義と基本的性質：

- $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n,m)} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dm\right)^{1/p} \qquad (p > 0).$
- $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n,m)} := \inf\{C > 0 \mid |f(x)| \le C \quad m - a.e. x\}$
- $m(\mathbb{R}^n) < \infty$ のとき
  $p > q \Longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n, m) \subset L^q(\mathbb{R}^n, m)$ 実際,
  $\|f\|_{L^q} \le m(\mathbb{R}^n)^{1-q/p}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n,m)}.$
- $m(\mathbb{R}^n) = \infty$ のとき
  $p \ne q$ のとき, $L^p(\mathbb{R}^n, m)$ $L^q(\mathbb{R}^n, m)$ の間に包含関係は無い. しかし,

$$f \in L^p \cap L^q \ (q < p) \Longrightarrow f \in L^r \ (q \le \forall r \le p).$$

- Minkowski, Hölder の不等式 $(p \ge 1, 1/p + 1/q = 1)$

$$\|f + g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \qquad \|fg\|_{L^1} \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$$

有界線形作用素, 作用素ノルム

線形作用素 $T : L^q \to L^p$ の作用素ノルム

$$\|T\|_{q\to p} := \inf\left\{C \mid \|Tf\|_p \le C\|f\|_q \ \forall f \in L^q\right\}.$$

$\inf \emptyset = +\infty$ と約束する. $\|T\|_{q\to p} < \infty$ のとき, 有界線形作用素という. これは, T が連続線形作用素ということと同値である.

- $T_i : L^{p_i} \to L^{p_{i+1}}$ $(1 \le i \le n-1)$ が有界線形作用素のとき, 合成作用素 $T_{n-1}\cdots T_1$ は L^{p_1} から L^{p_n} への有界線形作用素で

$$\|T_{n-1}\cdots T_1\|_{p_1\to p_n} \le \|T_{n-1}\|_{p_{n-1}\to p_n}\cdots\|T_1\|_{p_1\to p_2}.$$

T_t の性質

1. $T_t : L^2 \to L^2$ は有界線形作用素.
2. $T_{t+s} = T_t \cdot T_s \ (t, s \geq 0)$.
3. $f \in \mathrm{D}(A) \Longrightarrow \lim_{t\to 0} \frac{T_t f - f}{t} = Af$.
4. $f \in L^2$ ならば $T_t f \in \mathrm{D}(A) \ (t > 0)$ かつ
$$\lim_{h\to 0} \frac{T_{t+h}f - T_t f}{h} = A(T_t f) \qquad t > 0.$$
5. (縮小性)　$\|T_t\|_{2\to 2} \leq 1$.
6. $0 \leq f \leq 1 \ (m - a.e.)$ かつ $f \in L^2 \Longrightarrow$
$0 \leq T_t f \leq 1 \ (m - a.e.)$
7. 補間理論より, T_t は L^p から L^p への有界線形作用素に拡張できることと $\|T_t\|_{p\to p} \leq 1$ が示せる $(p \geq 1)$.

$T : L^1 \to L^\infty$ が有界線形作用素とする. このとき, 関数 $K(x, y)$ $(x, y \in \mathbb{R}^n)$ が存在して

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(y) dm(y) \qquad f \in L^1(\mathbb{R}^n, m)$$

$$\|T\|_{1\to\infty} = \mathrm{esssup}_{x,y} |K(x, y)|$$

と積分作用素の形で表されることが示せる.

$$\left| \int K(x, y) f(y) dm(y) \right| \leq \int |K(x, y)||f(y)| dm(y)$$

$$\leq \mathrm{esssup}_{x,y} |K(x, y)| \int |f(y)| dm(y)$$

$$= \mathrm{esssup}_{x,y} |K(x, y)| \|f\|_{L^1}$$

ゆえ 積分作用素の形で表されていたら $\|T\|_{1\to\infty} \leq \mathrm{esssup}_{x,y} |K(x, y)|$ は自明である.

$T_t : L^1 \to L^\infty$ が有界, すなわち ultrabounded であることが示せれば, 積分核 (熱核, heat kernel) $p(t,x,y)$ が存在して,

$$(T_t f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} p(t,x,y) f(y) dm(y)$$

と表されることがわかる.

$A = \Delta$, $dm(x) = dx$ $(\varphi(x) \equiv 0)$ のとき,

$$(T_t f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}} f(y) dy,$$

$$\|T_t\|_{1\to\infty} = \sup_{x,y} \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}} = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}.$$

a, φ に対する仮定

- $\varphi : \mathbb{R}^n$ 上の滑らかな有界関数で $dm(x) = e^{-\varphi(x)}dx$.
- $a(x) = \left(a^{ij}(x)\right)_{1\le i,j\le n}$ は正定値対称行列で $C > 0$ が存在して, 任意の $\xi = (\xi_i) \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\sum_{1\le i,j\le n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge C|\xi|^2.$$

さらに $a^{ij}(x)$ は x の C^∞ 関数とする.

この a, φ から定まる A で生成される $L^2(\mathbb{R}^n, dm)$ 上の半群 $T_t = e^{tA}$ が熱核 $p(t, x, y)$ を持ち, $\exists C > 0$

$$p(t, x, y) \le Ct^{-n/2} \qquad \forall t > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

という評価を持つことを対数ソボレフ不等式を用いて示す.

注意

$[0,2\pi]$ 上の周期境界条件
$u(t,0)=u(t,2\pi), u_x(t,0)=u_x(t,2\pi)\ \ (t>0)$ の熱方程式 $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\quad u(0,x)=f(x)$ の熱核は
$p(t,x,y)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{e^{-n^2 t}}{2\pi}\cos n(x-y)$ となる. すべての $t>0$ について $\int_0^{2\pi}p(t,x,y)dy=1$ であり,
$p(t,x,y)\le Ct^{-1/2}\ \ t>0$ の形の評価は成立しない.
実際,

$$\lim_{t\to\infty}p(t,x,y)=\frac{1}{2\pi}\qquad x,y\in[0,2\pi]^2\quad \text{uniformly.}$$

この場合, 対数ソボレフ不等式を用いて得られる粗い評価は $p(t,x,y)\le Ct^{-1/2}e^{C't}\quad (C'>0)$ の形の評価となる.

以下, 簡単のため,

$$\mathcal{E}_{a,\varphi}(f,g) := \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{1\le i,j\le n} a^{ij}(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\frac{\partial g}{\partial x_j}(x)e^{-\varphi(x)}dx$$

$$\left(= \int_{\mathbb{R}^n} (-Af)(x)g(x)e^{-\varphi(x)}dx\right)$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} (-Ag)(x)f(x)e^{-\varphi(x)}dx\right)$$

と書くことにする. 抽象的に σ-有限な測度空間 $(X, \mathcal{B}, m)$ 上の A, $\mathcal{E}$, T_t に対して定理は成立するが, $\mathbb{R}^n$, $dm = e^{-\varphi}dx$ 等の最初に述べた設定で説明する.

Theorem 1

正定数 α, β が存在し, 任意の $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ について次の $(LSI)_{\alpha,\beta}$ が成立するとする:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^2 \log\left(f^2(x)/\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n,m)}\right) dm \leq \alpha \mathcal{E}_{a,\varphi}(f,f) + \beta \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n,m)}.$$

ただし, $0 \log 0 = 0$ とする. このとき $q \geq 2$ に対して $p(t) = e^{4t/\alpha}(q-1)+1$, $r(t) = \beta\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p(t)}\right)$ とおくと

$$\|T_t\|_{q \to p(t)} \leq e^{r(t)}.$$

証明： $\phi(t) = e^{-r(t)}\|T_t f\|_{p(t)}$ $(f \in C_0^\infty)$ とおき, $\phi'(t) \leq 0$ を示し, $\phi(t) \leq \phi(0)(= \|f\|_{L^q})$ を示せば良い.

Theorem 2

$a(x) = I, \varphi \equiv 0$ の場合を考える. すなわち, $m =$ ルベーグ測度, $A = \Delta$ とする. このとき, 任意の $\lambda > 0$, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して次の対数ソボレフ不等式が成立する.

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^2 \log\left(f^2(x)/\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n,dx)}\right) dx \\
&\leq \lambda \int_{\mathbb{R}^n} |(Df)(x)|^2 dx \\
&\quad + \frac{n}{2}\left(\log\frac{1}{\lambda} - \log\pi - 2\right)\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n,dx)}
\end{aligned}$$

$\alpha = \lambda, \quad \beta = \dfrac{n}{2}\left(\log\dfrac{1}{\lambda} - \log\pi - 2\right)$ に当たる.

Theorem 3

a, φ が仮定を満たすとする. このとき, C, φ の最大値・最小値に依存する $C_n > 0$ が存在して $\mathcal{E}_{a,\varphi}$ について $(LSI)_{\lambda, \frac{n}{2}\log(\frac{1}{\lambda})+C_n}$ が成立する. すなわち,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^2 \log\left(f^2(x)/\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n,m)}\right) dm \leq \lambda \mathcal{E}_{a,\varphi}(f,f) + \left(\frac{n}{2}\log\left(\frac{1}{\lambda}\right) + C_n\right)\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n,m)}$$

証明：$\varphi \equiv 0$ のときは, $\int_{\mathbb{R}^n} |(Df)(x)|^2 dx \leq \frac{1}{C}\mathcal{E}_{a,0}(f,f)$ なので, これを Theorem 2 に代入して, $\frac{\lambda}{C}$ を λ と読み替えれば良い. $C_n = -\frac{n}{2}(\log C + \log \pi + 2)$ となる.

$(LSI)_{\lambda, \frac{n}{2}\log(1/\lambda)+C_n}$ が成立するとする. Theorem 1 より,

$$\|T_s\|_{q\to e^{\frac{4s}{\lambda}}(q-1)+1}$$
$$\leq \exp\left[\left(\frac{n}{2}\log\left(\frac{1}{\lambda}\right)+C_n\right)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{e^{\frac{4s}{\lambda}}(q-1)+1}\right)\right]$$

$$s=\frac{t}{2^k}, q=2^k, \lambda=\frac{t}{2^{k-2}}\frac{1}{\log\left(\frac{2^{k+1}-1}{2^k-1}\right)} \quad k=1,2,\ldots$$

を代入すると,

$$\|T_{2^{-k}t}\|_{2^k\to 2^{k+1}} \leq \exp\left[\left(\log t^{-n/2}\right)\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k+1}}\right)\right]\times$$
$$\exp\left[\left((k-2)\log 2+\frac{n}{2}\log\log 3+C_n\right)\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k+1}}\right)\right].$$

$T_{(1-\frac{1}{2^N})t} = T_{2^{-N}t}\cdots T_{2^{-1}t}$ なので作用素ノルムの性質から

$$
\begin{aligned}
&\|T_{(1-\frac{1}{2^N})t}\|_{2\to 2^{N+1}} \\
&\le \prod_{k=1}^{N} \|T_{2^{-k}t}\|_{2^k\to 2^{k+1}} \\
&\le t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{N+1}}\right)} \exp\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^{k+1}}\right)C'_n\right].
\end{aligned}
$$

$N\to\infty$ として, $\|T_t\|_{2\to\infty} \le C''_n t^{-n/4}$. さらに $\|T_t\|_{1\to\infty} \le \|T_{t/2}\|^2_{2\to\infty}$ から

$$
\|T_t\|_{1\to\infty} \le C'''_n t^{-n/2}.
$$

Theorem 2 の証明について

$\mathbb{R}^n$ 上の正規分布

$$d\mu_n(x) = \rho_n(x)^2 dx, \quad \rho_n(x) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4}}}{(2\pi)^{n/4}}$$

に対して, 次の Gross の LSI が成立する.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^2 \log\left(f(x)^2/\|f\|_{L^2(\mu_n)}^2\right) d\mu_n(x) \le 2\int_{\mathbb{R}^n} |(Df)(x)|^2 d\mu_n(x).$$

等号成立は $f(x) = e^{(a,x)}$ の形の関数のみ.
この式で $f(x) = u(x)\rho_n(x)^{-1}$ を代入して変形すると

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)^2 \log\left(u(x)^2/\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n,dx)}\right) dx$$
$$\leq 2\int_{\mathbb{R}^n} |Du(x)|^2 dx - \frac{n}{2}(\log 2\pi + 2)\int_{\mathbb{R}^n} u(x)^2 dx.$$

この式に $u_\lambda(x) = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{n/4} u\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}x\right)$ を代入する.

$\|u_\lambda\|_{L^2(dx)} = \|u\|_{L^2(dx)}$ に注意して変形すると Theorem 2 が得られる. では, Gross の LSI はどのように示すのか？

- $n = 1$ のとき

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)^2 \log f(x)^2 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \leq 2 \int_{\mathbb{R}} f'(x)^2 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx + \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)^2 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \right) \log \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)^2 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \right)$$

一般の n の場合は, 帰納法で示せる.

Remark 1

$|Df(x)|^2$ の積分の前にかかっている定数は 2 で次元 n には依存しない. 対数ソボレフ不等式は無限直積確率空間 $(\mathbb{R}^\infty, \mu_1^{\otimes\infty})$ でも成立する. ソボレフの不等式が, 次元に依存するのとは大きな違いである.

1 次元正規分布に対する対数ソボレフ不等式の証明

N 次元立方体 C_N 上の離散対数ソボレフ不等式と中心極限定理を用いる方法を紹介する.

- $C_N = \{-1, 1\}^N (= \{x = (x_1, \ldots, x_N) \mid x_i = \pm 1, 1 \leq i \leq N\})$, $C_0 = \{e\}$ 一点集合.
- $f = f(x) : C_N \to \mathbb{R}$ に対して, $D_i f : C_{N-1} \to \mathbb{R}$ を

$$(D_i f)(x') = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, x_{N-1}) - f(x_1, \ldots, x_{i-1}, -1, x_i, \ldots, x_{N-1}).$$

  ここで $x' = (x_1, \ldots, x_{N-1}) \in C_{N-1}$.
- $N = 1$ のとき、$(D_1 f)(e) = f(1) - f(-1)$ であり, 関数というよりこの数と同一視できる.

C_N 上の一様確率測度 ν_N, すなわち,

$$\nu_N(\{x\}) = 2^{-N} \qquad (x \in C_N)$$

を満たす確率を考える. g を C_N 上の関数 (確率変数) とする. 和

$$\frac{1}{2^N}\sum_{x\in C_N} g(x)$$

は, g の ν_N による期待値

$$E_{\nu_N}[g]$$

に他ならない. ν_N の下
$X_i(x) = x_i$ $(x = (x_1, \ldots, x_N) \in C_N)$ という確率変数は $\nu_N(X_i = 1) = \nu_N(X_i = -1) = \frac{1}{2}$ を満たす独立確率変数.
この確率変数列に対して中心極限定理を適用する.

Theorem 4

$C_N = \{-1, 1\}^N$ 上の関数 f に対して

$$\frac{1}{2^N} \sum_{x \in C_N} f(x)^2 \log f(x)^2 \leq \frac{1}{2^N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{x' \in C_{N-1}} |(D_i f)(x')|^2 + \left(\frac{1}{2^N} \sum_{x \in C_N} f(x)^2 \right) \log \left(\frac{1}{2^N} \sum_{x \in C_N} f(x)^2 \right).$$

等号は f が定数関数のときのみ成立.

$N = 1$ のときは, $f(1) = b, f(-1) = a$ とおくと次の不等式と同値になる:

$$\frac{a^2 \log a^2 + b^2 \log b^2}{2} - \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right) \log \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)$$
$$\leq \frac{1}{2}(b - a)^2, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

なお、このような不等式は大学入試問題にも出題されたことがある. 一般の場合は N に関する帰納法で証明する.

証明

$N=1$ は $f(x)=\frac{x^2+1}{2}\log\left(\frac{x^2+1}{2}\right)+\frac{(x-1)^2}{2}-x^2\log x$ が $x>0$ で非負かつ $f(x)=0$ は $x=1$ と同値から示せる. $N-1$ の時の成立を仮定し, N のときを示す.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2^N}\sum_{x\in C_N} f(x)^2\log f(x)^2\\
&=\frac{1}{2^{N-1}}\sum_{x'\in C_{N-1}}\frac{1}{2}\Big(f(1,x')^2\log f(1,x')^2\\
&\qquad+f(-1,x')^2\log f(-1,x')^2\Big)
\end{aligned}
$$

$x'\in C_{N-1}$ を固定し, 関数 $x(\in C_1)\mapsto f(x,x')$ について $N=1$ の場合の離散対数ソボレフ不等式を適用し

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big(f(1,x')^2\log f(1,x')^2 + f(-1,x')^2\log f(-1,x')^2\Big)\\
&\le \frac{1}{2}\left(f(1,x') - f(-1,x')\right)^2\\
&+ \quad \frac{f(1,x')^2 + f(-1,x')^2}{2}\log\left(\frac{f(1,x')^2 + f(-1,x')^2}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(f(1,x') - f(-1,x')\right)^2 + \varphi(x')^2\log\varphi(x')^2,
\end{aligned}
$$

ここで, 以下のようにおいた.

$$
\varphi(x') = \sqrt{\frac{f(1,x')^2 + f(-1,x')^2}{2}} \quad x' \in C_{N-1}.
$$

したがって

$$\frac{1}{2^N}\sum_{x\in C_N} f(x)^2\log f(x)^2 \le \frac{1}{2^N}\sum_{x'\in C_{N-1}} (f(1,x')-f(-1,x'))^2$$
$$+\frac{1}{2^{N-1}}\sum_{x'\in C_{N-1}} \varphi(x')^2\log\varphi(x')^2$$

$I_{N-1}=\frac{1}{2^{N-1}}\sum_{x'\in C_{N-1}}\varphi(x')^2\log\varphi(x')^2$ に対して帰納法の仮定を用いると,

$$I_{N-1}\le \frac{1}{2^{N-1}}\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{x''\in C_{N-2}} |(D_i\varphi)(x'')|^2$$
$$+\left(\frac{\sum_{x'}\varphi(x')^2}{2^{N-1}}\right)\log\left(\frac{\sum_{x'}\varphi(x')^2}{2^{N-1}}\right).$$

φ の定義から

$$\left(\frac{\sum_{x'} \varphi(x')^2}{2^{N-1}}\right) \log \left(\frac{\sum_{x'} \varphi(x')^2}{2^{N-1}}\right) = \left(\frac{1}{2^N} \sum_{x \in C_N} f(x)^2\right) \log \left(\frac{1}{2^N} \sum_{x \in C_N} f(x)^2\right).$$

$x'' \in C_{N-2}$ と $1 \leq i \leq N-1$ に対して

$$|(D_i\varphi)(x'')|^2 \leq \frac{1}{2}\left((D_{i+1}f)(1, x'')^2 + (D_{i+1}f)(-1, x'')^2\right).$$

これは、不等式

$\left(\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{c^2+d^2}\right)^2 \leq (a-c)^2 + (b-d)^2$ から従う.

以上の不等式より,

$$\frac{1}{2^N}\sum_{x\in C_N} f(x)^2 \log f(x)^2 \le \frac{1}{2^N}\sum_{x'\in C_{N-1}} \left(f(1,x') - f(-1,x')\right)^2$$

$$+\frac{1}{2^N}\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{x''\in C_{N-2}} \Big((D_{i+1}f)(1,x'')^2 + (D_{i+1}f)(-1,x'')^2\Big)$$

$$+\left(\frac{1}{2^N}\sum_{x\in C_N} f(x)^2\right)\log\left(\frac{1}{2^N}\sum_{x\in C_N} f(x)^2\right).$$

これは N のときの対数ソボレフ不等式である. 等号成立条件も帰納法でわかる.

C_N は確率測度 ν_N を持つ確率空間である. この上で定義された確率変数 $X_i(x) = x_i$ $(x = (x_i) \in C_N)$ は $\nu_N(X_i = 1) = \nu_N(X_i = -1) = 1/2$ となる独立確率変数である. これは, 任意の $(x_1, \ldots, x_N) \in C_N$ に対して

$$\nu_N(X_1 = x_1, \ldots, X_N = x_N) = \frac{1}{2^N}$$

であることからわかる. $\{X_i\}$ は理想的な N 回の独立な硬貨投げ (すなわち, 表裏の出る確率が 1/2) で i 回目に表が出たら 1, 裏が出たら -1 としたもの.

(注) 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数 $Z_1, \ldots, Z_N$ が独立とは任意のボレル集合 $B_1, \ldots, B_N$ に対して

$$P(Z_1 \in B_1, \ldots, Z_N \in B_N) = P(Z_1 \in B_1) \cdots P(Z_N \in B_N)$$

となるときに言う.

$E[X_i] = 1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} = 0,$
$V[X_i] = E[(X_i - E[X_i])^2] = (1-0)^2 \times \frac{1}{2} + (-1-0)^2 \times \frac{1}{2} = 1$
だから中心極限定理により，$\frac{X_1+\cdots+X_N}{\sqrt{N}}$ の分布は標準正規分布に収束する．これは正確に言うと次が成立するということ:
g を $\mathbb{R}$ 上の有界連続関数とすると

$$\lim_{N\to\infty} E\left[g\left(\frac{X_1+\cdots+X_N}{\sqrt{N}}\right)\right] = \int_{\mathbb{R}} g(x)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx.$$

期待値の定義から，

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2^N} \sum_{x\in C_N} g\left(\frac{x_1+\cdots+x_N}{\sqrt{N}}\right) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx.$$

$g \in C_b^2(\mathbb{R})$ とし, $f_g(x) = g\left(\frac{x_1+\cdots+x_N}{\sqrt{N}}\right)$ を以下の離散対数ソボレフ不等式に代入する:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2^N}\sum_{x\in C_N} f(x)^2 \log f(x)^2 \\
&\quad \le \frac{1}{2^N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{x'\in C_{N-1}} |(D_i f)(x')|^2 \\
&\quad + \left(\frac{1}{2^N}\sum_{x\in C_N} f(x)^2\right)\log\left(\frac{1}{2^N}\sum_{x\in C_N} f(x)^2\right).
\end{aligned}
$$

$$E\left[g\left(\frac{X_1+\cdots+X_N}{\sqrt{N}}\right)^2\log\left(g\left(\frac{X_1+\cdots+X_N}{\sqrt{N}}\right)\right)^2\right]$$

$\leq |D_i f_g|^2$ の和の項 $(= I_N$ とおく$)$

$$+E\left[g\left(\frac{X_1+\cdots+X_N}{\sqrt{N}}\right)^2\right]\log E\left[g\left(\frac{X_1+\cdots+X_N}{\sqrt{N}}\right)^2\right]$$

中心極限定理より

$$\lim_{N\to\infty}E\left[g\left(\frac{X_1+\cdots+X_N}{\sqrt{N}}\right)^2\log\left(g\left(\frac{X_1+\cdots+X_N}{\sqrt{N}}\right)\right)^2\right]$$

$$=\int_{\mathbb{R}} g(x)^2\log g(x)^2\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx.$$

$\lim_{N\to\infty} I_N = 2\int_{\mathbb{R}} g'(x)^2 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$ が示せればよい.

$$I_N = \frac{1}{2^N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{x'\in C_{N-1}} |(D_i f_g)(x')|^2$$

$$= \frac{1}{2^N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{x'\in C_{N-1}} \left| g\left(\frac{1+\sum_{k=1}^{N-1} x'_k}{\sqrt{N}}\right) - g\left(\frac{-1+\sum_{k=1}^{N-1} x'_k}{\sqrt{N}}\right)\right|^2$$

$$= \frac{N}{2} E\left[\left| g\left(\frac{1+\sum_{1\le i\le N-1} X_i}{\sqrt{N}}\right) - g\left(\frac{-1+\sum_{1\le i\le N-1} X_i}{\sqrt{N}}\right)\right|^2\right].$$

$g(b) - g(a) = \int_0^1 g'(a + t(b-a))(b-a)dt$ を用い, この右辺 I'_N を変形する.

$$
\begin{aligned}
I'_N &= \frac{N}{2} E\left[\left|\int_0^1 g'\left(\frac{\sum_{1\le i\le N-1} X_i}{\sqrt{N}} + \frac{2t-1}{\sqrt{N}}\right)\frac{2}{\sqrt{N}}dt\right|^2\right] \\
&\le 2\int_0^1 E\left[g'\left(\frac{\sum_{1\le i\le N-1} X_i}{\sqrt{N}} + \frac{2t-1}{\sqrt{N}}\right)^2\right]dt \\
&= 2E\left[g'\left(\frac{\sum_{1\le i\le N-1} X_i}{\sqrt{N-1}}\right)^2\right] + R_N.
\end{aligned}
$$

$\lim_{N\to\infty} R_N = 0$ が示せるので, 再び中心極限定理を用いて証明が終わる.