7.2 偏微分 (続き)

Definition 1 (C^n 級関数) 開集合 D 上の関数 $f(x,y)$ が C^n 級であるとは，次が成立するときに言う．また, D で C^n 級の関数全体を $C^n(D)$ と書く．
(1) $f(x,y)$ は n 回偏微分可能である．
(2) n 次の偏導関数がすべて (どの変数でどの順番で微分するかで総計 2^n 個ある) D で連続である．

$n=2$ の場合と同様に次の定理が成り立つ．

Theorem 2 $f \in C^n(D)$ とする．次が成立する．
(1) $f(x,y)$ の n 階までの偏導関数 ($2^{n+1}-2$ 個ある) と $f(x,y)$ 自身は D で連続である．
(2) $f(x,y)$ を x で p 回，y で q 回偏微分して得られる関数は $\binom{p+q}{p}$ 個あるが，これらは偏微分の順序に無関係にすべて同じ関数になる．これを

$$\frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial y^q}(x,y), \qquad \frac{\partial^{p+q} f}{\partial y^q \partial x^p}(x,y)$$

などと書く．

7.3 連鎖律

連鎖律というのは多変数関数の場合の合成関数の微分法であり，英語で言うと chain rule(チェインルール) という．一変数の合成関数の微分法は $F(u)=f(\varphi(u))$ のとき

$$F'(u) = f'(\varphi(u))\varphi'(u) \qquad (\diamondsuit)$$

と書けるが，二つの関数の微分が鎖のように連なってかけられることからこの名前がある．

Theorem 3 $f(x,y)$ を (x,y) 平面の開集合 D 上の C^1 級関数とする．u の C^1 級関数 $x=\varphi_1(u), y=\varphi_2(u)$ $(a<u<b)$ が

$$(\varphi_1(u), \varphi_2(u)) \in D \qquad (a<u<b)$$

をみたすとき，合成関数 $F(u)=f(\varphi_1(u),\varphi_2(u))$ も u の C^1 級関数で

$$F'(u) = f_x\left(\varphi_1(u),\varphi_2(u)\right)\varphi_1'(u) + f_y(\varphi_1(u),\varphi_2(u))\varphi_2'(u) \qquad (a<u<b)$$

が成立する．

次に 2 変数関数同士の合成関数の chain rule を述べる．本質的には，上の定理と同じである．

Theorem 4 $f(x,y)$ を (x,y) 平面の開集合 D 上の C^1 級関数とする．$x=\varphi_1(u,v), y=\varphi_2(u,v)$ $((u,v)\in G)$ が C^1 級の関数で $(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v)) \in D$ $((u,v \in G))$ を満たすとする．このとき，$F(u,v) = f\left(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v)\right)$ $((u,v)\in G)$ は (u,v) の C^1 級関数で

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v)\right)\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v)\right)\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v) \\
\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v)\right)\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\varphi(u,v),\psi(u,v)\right)\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u,v)
\end{aligned}$$

注意 5 Theorem 4 のような 2 変数関数の組 $(x,y)=(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v))$ は (u,v) 平面の集合 G から (x,y) 平面の集合 D への写像 $\Phi:G\to D$ を定めている．Φ の各成分 $\varphi_1(u,v)$, $\varphi_2(u,v)$ は (u,v) の C^1 級の関数なので，これを C^1 級の写像という．

注意 6 上の微分法の式を行列の積の形で書くと $(\diamondsuit)$ の式との類似性がよりはっきりとする．

$$F'(u)=\Big(f_x(\varphi_1(u),\varphi_2(u)),f_y(\varphi_1(u),\varphi_2(u))\Big)\begin{pmatrix}\varphi_1'(u)\\ \varphi_2'(u)\end{pmatrix}. \tag{1}$$

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{\partial F}{\partial u}(u,v),\frac{\partial F}{\partial v}(u,v)\Big)\\ &\quad=\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\left(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v)\right),\frac{\partial f}{\partial y}\left(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v)\right)\Big)\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(u,v)\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}(u,v)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2}$$

ここで 2 変数関数 $f(x,y)$, G から D への C^1 級写像 $(x,y)=\Phi(u,v)=(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v))$ に対して 2 次元ベクトル，2 次正方行列を

$$(Df)(x,y)=(f_x(x,y),f_y(x,y)) \tag{3}$$

$$(D\Phi)(u,v)=\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(u,v)\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}(u,v)\end{pmatrix}\left(=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\end{pmatrix}\text{のようにも書く}\right) \tag{4}$$

と定義すると式 (2) は行列の積を用いて，

$$DF(u,v)=(Df)(\Phi(u,v))(D\Phi)\,(u,v)$$

のようにかける．$Df, D\Phi$ ともにそれぞれ関数 f, 写像 Φ の微分という．また，Df を f のグラジエントベクトル，$D\Phi$ を写像 Φ のヤコビ行列とも言う．

さらに，(x,y) 平面の開集合 D から (z,w) 平面の開集合 D' への C^1 級写像 $(z,w)=(\psi_1(x,y),\psi_2(x,y))=\Psi(x,y)$ があるとき，合成写像

$$(z,w)=\Psi(\Phi(u,v))=(\psi_1(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v)),\psi_2(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v)))$$

を考えると z,w は (u,v) の関数になる．合成写像 $\Psi\circ\Phi(u,v)$ のヤコビ行列は $D\left(\Psi\circ\Phi\right)(u,v)=(D\Psi)(\Phi(u,v))(D\Phi)(u,v)$ のように行列の積の形でかけることがわかる．すなわち

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\\ \frac{\partial w}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial w}{\partial v}(u,v)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial w}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial w}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\end{pmatrix}$$

である．これは (2) 式 (あるいは Theorem 4) から直ちにわかる．次回は変数変換の代表的な例，極座標表示とその微分について話をする．