数学用語集

数学 (以外もそうだと思いますが) の講義ではテクニカルターム (専門用語) 以外にも独特の言い回しをすることがあります。高校の授業ではあまり出てこなくて、大学の講義で、よく出てくる言葉および数学上のテクニカルタームをまとめておきます。

(1) 任意

すべてのと言う意味。$\forall\varepsilon > 0$ と書いて「任意の正数 ε に対して」「全ての正数 ε に対して」と読む。$\forall$ は All, Any の頭文字の A を逆さにしたものである。

なお ε(" イプシロン" と読む) と書いたら、小さい正数 (＝せいすう、整数ではない) と思うのが数学業界の常識である。時々、テストの答案で $\lim_{\varepsilon\to\infty} f(\varepsilon)$ と書く学生がいます。論理的に間違いでは無いが、感覚的におかしな感じがします。

(2) 存在

$\exists\delta > 0$ と書いて「正数 δ が存在して」と読む。$\exists$ の記号は存在するの exist の頭文字 E をからきている。δ はデルタと読む。ε, δ ともにギリシア語である。数学ではギリシア語を数式に用いることが多い。他に λ, Λ, Σ など。ギリシア人がギリシア語で数学の論文を書くと大変な気がする。これは、ギリシアに旅行で行ったとき、案内板が当然ながら、これらの文字で埋め尽くされていたので持った会田の感想。通常は我々(理系の研究者一般)は英語で論文を書きます。研究室に配属されたり、修士・博士課程に進学したり、あるいは研究者になると英語を話したり、書いたりする機会が多くなります。もし、英語は単に受験で必要だからと思って勉強して来た人は心を入れ換えて日常的に使う英語を意識して勉強を続けてください。大学入学の時期は、受験勉強のおかげで文法・単語ともに知識がしっかりしているから、よい機会です。

(3) たかだか

“たかだか” は” 多くても” という意味, at most のこと。例えば、二つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ について

「たかだか有限個の自然数 n を除いて $a_n < b_n$」

といったら

「$a_n \geq b_n$ となる自然数 n は多くても有限個である」

ということ。すべての自然数 n について $a_n < b_n$ となる可能性もある。

(4) 不等号 $\leq, \geq$ の一本棒

高校までは不等号は $\leqq, \geqq$ と書いてきたと思いますが、これからは $\leq, \geq$ と書くことが多くなります。こちらの方が世界標準だと思います。TeX とよばれる数式を含んだ文章の整形システム (プレビューアで見たり、印刷したりできるファイルを作るソフト、今は LaTeX2ε が主流、理系研究者が論文を書くときに用います。この文章も LaTeX2ε で書いている) ではこちらが普通用いられる。なお、Microsoft の Word が文章を書くソフトとして、有名だがこれだと数式を書くとき不自由することが多い。

(5) 十分小さな・十分大きな

(1)「二つの関数 $f(x), g(x)$ に対して、十分大きな x について、$f(x) \leq g(x)$.」
とは
「ある正数 R が存在して、$x \geq R$ ならば $f(x) \leq g(x)$」のことである。黒板では、
「$\exists R > 0, s.t. \forall x \geq R, f(x) \leq g(x)$」などと書く。s.t.=such that の略である。しかし、このように書くのは、黒板の上のことであり、論文でこのように書くと怒られます。正確に文章で書くと「There exists a positive constant R such that $f(x) \leq g(x)$ for all $x \geq R$.」である。

(1) のように書いたら、実はすべての x について $f(x) \leq g(x)$ が成立しているかも知れないが、ある値 R より大きな x について $f(x) \leq g(x)$ が成立してさえいればよく、小さな x についてはどうでもよいというニュアンスがあるのです。例えば次の命題を見よ。

命題 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ とする。十分大きな n について $a_n \leq b_n$ ならば $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

同様に
「$x > 0$ で定義された二つの関数 $f(x), g(x)$ について十分小さな x について $f(x) \leq g(x)$」
とは
「正数 ε が存在して $0 < x \leq \varepsilon$ となる x について $f(x) \leq g(x)$」
を意味する。

問 1 次の命題について上で述べた R, ε を求めてみよ。
(1) 十分大きな自然数 n について $2^n \geq 10000n$.
(2) 十分小さな x について $x^2 \leq \log(1+x)$

(6) 良く使う雑多な用語, etc.

以下の略語はラテン語である。
i.e.(=id est) すなわちの意味。
e.g.(=exempli gratia) 例えばの意味、for example と同じ。
cf.(=confer) compare=比較せよの意味。see と誤用する人多い。
n.b.(=nota bene) よく注意せよ。note well
次の記号は良く使われる。
$\mathbb{N}$: 自然数全体の集合
$\mathbb{Z}$: 整数全体の集合
$\mathbb{Q}$: 有理数全体の集合
$\mathbb{R}$: 実数全体の集合
$\mathbb{C}$: 複素数全体の集合

Theorem は定理のこと、Th., Thm と略記する。他に Definition は定義、Def. Proposition は命題、Prop. など。Lemma は補題である。補題とは定理を証明するための命題であるが、しばしば定理より重要であることがあります。

Proof は証明、Pf. と略記することが多い。
$:=$ と書いたら、左の式を右の物で定義すると言う意味を表す。
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ は定義を与える時に使う。例えば、

数列 $\{a_n\}$ が単調増加 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $n < m$ ならば $a_n \leq a_m$

などのように。

(7) 集合 $x \in X$ と書いたら x は集合 X の要素（または" 元") であることを意味する。$A \subset X$ と書いたら A は X の部分集合であることを意味する。高校までは集合と言ったら大体、式で定義される具体的に与えられる集合が多かったと思いますが、大学では例えば「実数 $\mathbb{R}$ の任意の有界部分集合 A には上限が存在する」など抽象的、一般的な集合を考えるなど違いがあります。

(8) 写像 高校で学んだ関数は写像の一種であるといえる。

X, Y を集合とする。X の要素 (=" 元" ともいう, “element” の訳) x に対して、Y のある要素 y を対応させる対応を X から Y への写像という。

$f : X \to Y$ と書いたら、X の要素 x に対して $f(x)$ という Y の要素を対応させる写像を表している。Y の部分集合の次の集合を X の f による像、値域という。

$$f(X) := \{f(x) \mid x \in X\}$$

$f : X \to Y$ と書いても $f(X) = Y$ とは限らないことに注意せよ。例えば三角関数の $\sin$ は $\mathbb{R}$ で定義された関数で、$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と書けるが、$\sin$ の像は $[-1, 1]$ である。$f(X) = Y$ のとき、f を" 全射", “上への対応” などと言う。$x \neq x'$ ならば $f(x) \neq f(x')$ のとき、f は" 単射", " 一対一対応" などという。

全射かつ単射のとき、全単射、上への一対一対応という。

$f : X \to Y$ が単射のとき、$y \in f(X)$ に対して $f(x) = y$ となる x が一意的に存在する。y に対して、この x を対応させる対応を f の逆写像と言い、f^{-1} と書く。

(注) 上の一意的というのも良く使われる言い方である。

問 2 関数 $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を $f(x) = (\log(1+x))^{\sin x}$ と定義する。次の問に答えよ。

(1) 上の関数 f の微分を求めよ。

(2) 関数 f は単射か?

(3) 関数 f の値域を求めよ。

注：ただし、$(0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, すなわち正の実数全体をあらわす。同様に $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ などとなる。$[a, b]$ は閉区間、$(a, b]$ は半開区間、(a, b) は開区間と呼ばれる。

平面上の点 (a, b) と区間 (a, b) との区別がつきにくいが、文脈でどちらかはわかるはずである。