Crystals, MV polytopes and "tropical flag varieties"

Yoshihisa Saito (Univ. of Tokyo)

March 11, 2010 @ Kyoto

Plan

- Review on known results (A_n 型に限定):

  Lusztig datum（$B(\infty)$ を parametrize する整数の組）
  MV polytopes

- 旗多様体の射影空間への埋め込み（Plücker embedding）のトロピカル化

  ただし，ここで言う「トロピカル化」とは

$$\begin{array}{ccc} \text{classical} & & \text{tropical} \\ \times & \leftrightarrow & + \\ + & \leftrightarrow & \min \end{array}$$

- $A_n \to A_\infty$ ($\mathfrak{gl}_{n+1} \to \mathfrak{gl}(\infty)$)

- $A_\infty \to A_{n-1}^{(1)}$ （n reduction）

Remark .

超離散可積分系の構造はunknown
（ちょっとは見えている）

§ PBW basis と Lusztig datum

$U_q = U_q(\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C}))$ （生成元：$e_i, f_i, k_i^{\pm 1}$ $(1 \le i \le n)$）

$T_i : U_q \to U_q$ $(1 \le i \le n)$：

$$T_i(e_j) = \begin{cases} -f_i k_i, & (i = j), \\ \sum_{k=0}^{-a_{i,j}} (-1)^{a_{i,j}+k} q^{a_{i,j}+k} e_i^{(k)} e_j e_i^{(-a_{i,j}-k)}, & (i \ne j), \end{cases}$$

$$T_i(f_j) = \begin{cases} -k_i^{-1} e_i, & (i = j), \\ \sum_{k=0}^{-a_{i,j}} (-1)^{a_{i,j}+k} q^{-a_{i,j}-k} f_i^{(-a_{i,j}-k)} f_j f_i^{(k)}, & (i \ne j), \end{cases}$$

$$T_i(k_j) = k_j k_i^{-a_{i,j}}.$$

（$(a_{i,j})_{i,j=1}^n$：Cartan matrix.）

Claim. T_i $(1 \le i \le n)$ は braid relation を満たす.

$w_0 = s_{i_1} \cdots s_{i_N}$：longest element の reduced expression
$\mathbf{i} = (i_1, \cdots, i_N)$：対応する reduced word （$N = \frac{n(n+1)}{2}$）

$$P_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{c})} := f_{i_1}^{(c_1)} \left(T_{i_1}(f_{i_1}^{(c_2)}) \right) \cdots \left(T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_{N-1}}(f_{i_N}^{(c_N)}) \right)$$

$$(\mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_N) \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^N)$$

Proposition .
(1) $B_{\mathbf{i}} := \{P_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{c})} \mid \mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_N) \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^N\}$：$U_q^-$ の $\mathbb{Q}(q)$-基底（これを U_q^- の PBW 型基底と呼ぶ）.

(2) $\mathcal{L}_{\mathbf{i}} := \oplus_{\mathbf{c}} \mathcal{A} P_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{c})}$ とすると，$\mathcal{L}_{\mathbf{i}} = L(\infty)$.
（ただし $\mathcal{A} := \{f \in \mathbb{Q}(q) \mid f$ は $q = 0$ で regular$\}$）

(3) $B_{\mathbf{i}} \bmod q\mathcal{L}_{\mathbf{i}} = B(\infty)$.

$$\text{Prop. 1} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_{\ge 0}^N & \leftrightarrow & B(\infty) \\ \mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_N) & \leftrightarrow & b_{\mathbf{c}} \end{array}$$

$\mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_N) \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^N$：$b = b_{\mathbf{c}} \in B(\infty)$ の $\mathbf{i}$-Lusztig datum

以下,

$$\mathbf{i} \ = \ (1,2,1,3,2,1,\cdots,n,n-1,\cdots,1)$$

の場合のみ考える ($w_0 = (s_1)(s_2s_1)(s_3s_2s_1)\cdots(s_ns_{n-1}\cdots s_1)$).

○ Lusztig datum の書き換え

$$\mathbf{c} = (c_1,\cdots,c_N) \to \mathbf{a} = \begin{matrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots & a_{1,n} & a_{1,n+1} \\ & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,n} & a_{2,n+1} \\ & & a_{3,4} & \cdots & a_{3,n} & a_{3,n+1} \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & a_{n-1,n} & a_{n-1,n+1} \\ & & & & & a_{n,n+1} \end{matrix}$$

ただし

$$\begin{gathered} a_{1,2} = c_1, \\ a_{1,3} = c_2, \quad a_{2,3} = c_3, \\ a_{1,4} = c_4, \quad a_{2,4} = c_5, \quad a_{3,4} = c_6, \\ \vdots \end{gathered}$$

このとき

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{a})} \ &\equiv \ \tilde{f}_1^{a_{1,2}} \left(\tilde{f}_2^{a_{1,3}+a_{2,3}} \tilde{f}_1^{a_{1,3}}\right) \left(\tilde{f}_3^{a_{1,4}+a_{2,4}+a_{3,4}} \tilde{f}_2^{a_{1,4}+a_{2,4}} \tilde{f}_1^{a_{1,4}}\right) \cdots \\ &\quad \times \left(\cdots \tilde{f}_2^{a_{1,n+1}+a_{2,n+1}} \tilde{f}_1^{a_{1,n+1}}\right) b_\infty \pmod{qL(\infty)} \end{aligned}$$

● Crystal structure は Lusztig datum の言葉で完全に記述出来る．例えば

$$\mathrm{wt}(\mathbf{a}) = -\sum_{1\le i\le n} m_i\alpha_i, \quad m_i = \sum_{1\le k\le i<l\le n+1} a_{k,l},$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(\mathbf{a}) = \max\{&a_{1,i+1},\ a_{1,i+1} + (a_{2,i+1} - a_{1,i}), \\ &a_{1,i+1} + (a_{2,i+1} - a_{1,i}) + (a_{3,i+1} - a_{2,i}),\ \cdots\} \end{aligned}$$

など（φ_i は ε_i から決まる．柏原作用素は略）.

§ MV polytopes

- Mirković-Vilonen (2000):

  affine Grassmaniann の中にある代数サイクル（MV cycles）を構成

- Kamnitzer (2005)：

  MV cycles の幾何学的情報を組合せ論的に翻訳
  $\Rightarrow$ MV polytopes （$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ 内の凸多面体）

  さらに，$\{\text{MV polytopes}\} \cong B(\infty)$ を証明.

○ MV polytope とは？

$\Lambda_1, \cdots, \Lambda_n$：fundamental weights

$W = \mathfrak{S}_{n+1}$：Weyl 群

$$\Gamma_n := \bigsqcup_{w \in W,\ 1 \leq i \leq n} w\Lambda_i \quad \text{(chamber weight の集合)}$$

chamber weights でパラメトライズされた整数の組

$$M_\bullet := (M_\gamma)_{\gamma \in \Gamma_n} \qquad (M_\gamma \in \mathbb{Z})$$

対して，$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ 内の polytope

$$P(M_\bullet) := \{\alpha \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \mid \langle \alpha, \gamma \rangle \geq M_\gamma \text{ for all } \gamma \in \Gamma_n\}$$

を考える.

Definition .

(1) $M_\bullet = (M_\gamma)_{\gamma\in\Gamma_n}$ が（e-normalized）BZ datum であるとは,

(BZ-0) $M_{\Lambda_i} = 0$ $(1 \le i \le n)$ （正規化条件）

(BZ-1) edge inequalities:

$$M_{ws_i\Lambda_i} + M_{w\Lambda_i} + \sum_{j\neq i} a_{j,i} M_{w\Lambda_j} \le 0 \quad (\forall\, w \in W,\ 1 \le \forall\, i \le n).$$

(BZ-2) 3-term relations:

$a_{i,j} = a_{j,i} = -1$ かつ $ws_i > w$, $ws_j > w$ のとき

$$M_{ws_i\Lambda_i} + M_{ws_j\Lambda_j} = \min\{M_{w\Lambda_i} + M_{ws_is_j\Lambda_j}, M_{ws_js_i\Lambda_i} + M_{w\Lambda_j}\}.$$

（ただし $(a_{i,j})$ は Cartan matrix, $>$ は Bruhat order）

(2) $M_\bullet = (M_\gamma)_{\gamma\in\Gamma_n}$ が BZ datum のとき，対応する polytope $P(M_\bullet)$ を MV polytope という.

Remark .

(1) この話は A 型以外でも出来る (Kamnitzer).

(2) MV polytope $P(M_\bullet)$ の頂点は次で与えられる (Kamnitzer):

$$\mu_w := \sum_{i=1}^{n} M_{w\Lambda_i} w\alpha_i^\vee \in \mathfrak{h}_\mathbb{R} \qquad (w \in W)$$

すなわち，$P(M_\bullet)$ は $\mu_\bullet := (\mu_w)_{w\in W}$ の convex hull.

（$\mu_\bullet := (\mu_w)_{w\in W}$ を $P(M_\bullet)$ の GGMS datum と呼ぶ.）

(3) 正規化条件 (BZ-0) は，$\mu_e = 0$ と同値．一方，幾何学的に自然に現れる正規化条件は $\mu_{w_0} = 0$.

（どっちでも（組合せ論レベルでは）大差ない）

(4) Kamnizer は (BZ-2) を tropical Plücker relations と呼んでいるが，今回は敢えてそう呼ばない.

((BZ-2) は "tropical Plücker relations" の一部と考えたい）

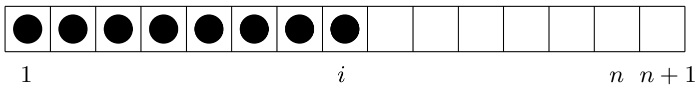
○ Maya図形による書き換え

$$\Gamma_n \quad \leftrightarrow \quad \mathcal{M}_n：サイズ\,n+1\,の\,\mathrm{Maya}\,図形$$

（ただし全て空箱，全て玉が詰まっている場合は除く.）

• $1 \leq i \leq n$ に対し

$\Lambda_i \ \leftrightarrow$



• $W = \mathfrak{S}_{n+1}$ は玉の位置の入れ替えで作用.

• $\mathcal{M}_n \ \leftrightarrow K \subset [1, n+1]_{\mathbb{Z}}$ で，$K \neq \phi$ かつ $K \neq [1, n+1]_{\mathbb{Z}}$
なるもの全体（ただし $[1, n+1]_{\mathbb{Z}} := [1, n+1] \cap \mathbb{Z}$）

この記法の下に上記の条件は次のように書き換えられる：

(BZ-1) $K \subset [1, n+1]_{\mathbb{Z}}$ と，$i, j \notin K$ に対して

$$M_{Ki} + M_{Kj} \leq M_{Kij} + M_K.$$

（ただし $M_{Kij} := M_{K \cup \{i,j\}}$ *etc.*，$M_\phi = M_{[1,n+1]_{\mathbb{Z}}} := 0.$）

(BZ-2) $K \subset [1, n+1]_{\mathbb{Z}}$ と, $i, j, k \notin K$ $(i < j < k)$ に対して

$$M_{Kik} + M_{Kj} = \min\{M_{Kij} + M_{Kk},\ M_{Kjk} + M_{Ki}\}.$$

○ Lusztig datum との対応

$$\{\text{Lusztig datum}\} \cong \{\text{BZ datum}\}\ (= \{\text{MV polytope}\})$$
$$\cong B(\infty)$$

Q：具体的な対応は？

Lusztig datum → BZ datum

- $M_{\Lambda_i} := 0.$
- $[s,t]_{\mathbb{Z}} \subset [1,n+1]_{\mathbb{Z}}$ に対し，$M_{[s,t]_{\mathbb{Z}}} := -\displaystyle\sum_{k \notin [s,t]_{\mathbb{Z}},\, l \in [s,t]_{\mathbb{Z}}} a_{k,l}$
- 後は 3-terms relations から一意的に決まる（BFZ）.

BZ datum → Lusztig datum

$$a_{k,l} := M_{[k,l]_{\mathbb{Z}}} + M_{[k+1,l-1]_{\mathbb{Z}}} - M_{[k,l-1]_{\mathbb{Z}}} - M_{[k+1,l]_{\mathbb{Z}}}.$$

Q：Lusztig datum → BZ datum の対応をより明示的に書けないか？

A：ある種の "行列式表示" がある.

§ Tropical Plücker relations

○ Tropical化

classical		tropical	classical		tropical
$\times$	$\leftrightarrow$	$+$	$+$	$\leftrightarrow$	min
$\div$	$\leftrightarrow$	$-$	$-$	$\leftrightarrow$	ダメ

$\Rightarrow$ 多項式がいつでも Tropical化出来るわけではない.

アイデア：

Plücker relations を

$$\text{単項式の和} = \text{単項式の和}$$

という形に直してから Tropical化する.

Example .

$$\xi_{1,2}\xi_3 - \xi_{1,3}\xi_2 + \xi_{2,3}\xi_1 = 0 \quad \left(\begin{array}{c} \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \text{内の} \\ Fl^{3,2,1}(\mathbb{C}^3) \text{の定義方程式} \end{array} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\xi_{1,3}\xi_2 = \xi_{1,2}\xi_3 + \xi_{2,3}\xi_1$$

$$\Downarrow$$

$$\xi_{1,3} + \xi_2 = \min\{\xi_{1,2} + \xi_3,\ \xi_{2,3} + \xi_1\}$$

Definition .
上の手続きでオリジナルの Plücker relations から得られる関係式を *Tropical Plc̆ker relations* と呼ぶ.

また，Tropical Plc̆ker relations を満たす整数の組全体を，この講演では “*Tropical flag variety*” と呼ぶことにする.

Remark .
次は3-term relation (BZ-2)：

$$M_{1,2}+M_3=\min\{M_{1,2}+M_3,\ M_{2,3}+M_1\}.$$

しかし，そうでないTropical Plčker relationsもたくさんある．

例えば,

$$\xi_{1,2}\xi_{3,4}-\xi_{1,3}\xi_{2,4}+\xi_{2,3}\xi_{1,4}=0 \quad \left(\begin{array}{c}\mathbb{P}^5(\mathbb{C})\text{内の}\\ Gr(2,4)\text{の定義方程式}\end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\xi_{1,3}\xi_{2,4}=\xi_{1,2}\xi_{3,4}+\xi_{2,3}\xi_{1,4}$$

$$\Downarrow$$

$$\xi_{1,3}+\xi_{2,4}=\min\{\xi_{1,2}+\xi_{3,4},\ \xi_{2,3}+\xi_{1,4}\}$$

$$(M_{1,3}+M_{2,4}=\min\{M_{1,2}+M_{3,4},\ M_{2,3}+M_{1,4}\})$$

これは３項間の関係式だが，3-term relations (BZ-2)には現れない.

○ 言葉の準備

Definition .
空でない集合 F 上に "和" と "積" が定まっていて，
(S1) "和" は可換かつ結合的.
(S2) "積" によって F は群をなす.
(S3) $(a+b)c = ab+ac$. が成り立つとき，F を *semifileld* と呼ぶ.

● 体は，通常の和と積に関して，常に semifileld.

Example .

$$F := \mathbb{Z}, \quad a \odot b := a+b, \quad a \oplus b := \min\{a,\ b\}$$

として，$\mathbb{Z}$ は semifield.

Example (Universal semifield)**.**
$\mathbb{Q}(z_1, \cdots, z_n)$：$n$ 変数有理関数体（有理係数）
$\Rightarrow$ semifield でもある.

$\mathbb{Q}_{>0}(z_1, \cdots, z_n)$：$z_1, \cdots, z_n$ を含む最小の sub-semifileld.
（Universal semifield という.）

$\Rightarrow \quad \mathbb{Q}_{>0}(z_1, \cdots, z_n) =$ 正の整数を係数とする多項式の比で書ける有理式全体

Lemma (Berenstein-Fomin-Zelevinsky)**.**
F を任意の semifield，$a_1, \cdots, a_n \in F$ を任意の元とする．このとき，semifield の射

$$\mathbb{Q}_{>0}(z_1, \cdots, z_n) \to F$$

であって，

$$z_i \mapsto a_i \quad (1 \le i \le n)$$

なるものが一意的に存在する.

○ BZ datum の明示的構成（行列式表示）

$\mathbf{z} = (z_{i,j}) \quad (1 \le i < j \le n+1)$

$\mathbb{Q}_{>0}(\mathbf{z})$：universal semifield

$(n+1)$ 次正方行列 $X_n(\mathbf{z}) = (x_{k,l}(\mathbf{z}))_{1 \le k,l \le n+1}$ を次で定める：

(1) $x_{1,l}(\mathbf{z}) := \delta_{1,l}$ （１行目）.

(2) $x_{p,l}(\mathbf{z})$ $(1 \le p \le k-1)$ が given として，k 行目は

$$x_{k,l}(\mathbf{z}) := \begin{cases} 1 & (l=1), \\ z_{1,l}T(x_{k-1,l-1}(\mathbf{z})) + T(x_{k-1,l}(\mathbf{z})) & (l \ge 2). \end{cases}$$

ただし $T(f(z_{p.q})) := f(z_{p+1,q+1})$.

$K = \{k_1, k_2, \cdots, k_m\}$, $L = \{l_1, l_2, \cdots, l_m\} \subset [1, n+1]_{\mathbb{Z}}$ に対し,

$\Delta_L^K(X_n(\mathbf{z}))$: $(k_1, k_2, \cdots, k_m)$ 行-$(l_1, l_2, \cdots, l_m)$ 列小行列式

特に $L = \{1, 2, \cdots, m\}$ のとき

$$\Delta^K(X_n(\mathbf{z}))$$

と書く.

さらに,

$$M_{n,K}(\mathbf{z}) := \left(\prod_{s=1}^{m} \prod_{p=1}^{k_s - 1} z_{p,k_s} \right)^{-1} \Delta^K(X_n(\mathbf{z})).$$

Proposition .
(1) $M_{n,K}(\mathbf{z})$ たちは Plücker relations を満たす.

(2) $M_{n,K}(\mathbf{z}) \in \mathbb{Q}_{>0}(\mathbf{z})$.（“Tropical 化” が可能！）

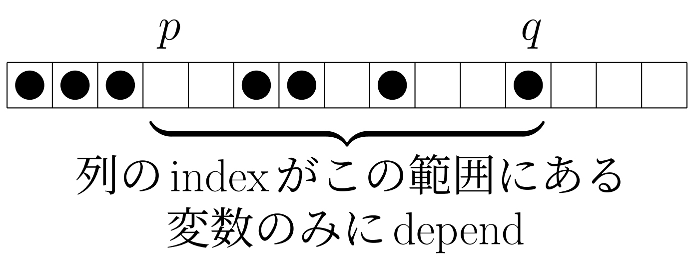
(3) $K = [s,t]_{\mathbb{Z}}$ のとき,

$$M_{n,K}(\mathbf{z}) = \left(\prod_{k \notin K, l \in K} z_{k,l} \right)^{-1}.$$

(4) $K = \{k_1 < k_2 < \cdots < k_m\}$ かつ,
- p：$k_p > p$ となる最小の数.
- $q := k_t$.

とする．このとき $M_{n,K}(\mathbf{z})$ は $z_{k,l}$ $(\underline{p \leq l \leq q})$ の有理式.

(4) を Maya 図形の言葉で書くと,



p：一番左にある空箱の位置.

q：一番右にある玉の位置.

Remark .
(2) $\Rightarrow$ 超離散系における “負の問題” が起きない.

与えられた非負整数の組（Lusztig datum）$\mathbf{a} = (a_{i,j})$ に対し，semifield の射

$$\Phi(\mathbb{Q}_{>0}(\mathbf{z})) \to \mathbb{Z}, \quad z_{i,j} \mapsto a_{i,j}$$

を考える.

Corollary .

(1) $\Phi(M_{n,K}(\mathbf{z}))$ たちは tropical Plücker relations を満たす.

(2) $\Phi(M_{n,K}(\mathbf{z})) = M_K$（先の BZ datum）.

$\Rightarrow$ BZ datum は（3-terms relations だけでなく）全ての tropical Plücker relations を満たす.

（*i.e.* BZ datum は "tropical flag variety" の点を与える.）

(3) $K = \{k_1 < k_2 < \cdots < k_m\}$ に対し，p, q を先のように定めると，M_K は $a_{k,l}$ $(\underline{p \leq l \leq q})$ にしか依らない.

• 次節で扱う

$$\text{“}A_n \ \rightarrow \ A_\infty\text{”}$$

の操作で，(3) が重要な役割を果たす.

§ A_∞ へ

○ A_∞ (or $\mathfrak{gl}(\infty)$) 型 Lusztig datum

Definition .
$\Pi := \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \mid i < j\}$ とし，以下のような非負整数の組

$$\mathbf{a} = (a_{i,j})_{(i,j)\in\Pi}, \quad a_{i,j} = 0 \quad \text{for} \quad j - i > {}^{\exists}N$$

を A_∞ *(or* $\mathfrak{gl}(\infty)$*)* **型** *Lusztig datum* と呼ぶ．また，この Lusztig datum の全体を $\mathcal{B}_\infty$ と書く．

$$\mathbf{a} = \begin{array}{ccccccc} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ & a_{-1,0} & a_{-1,1} & a_{-1,2} & a_{-1,3} & \cdots & a_{-1,n} & \cdots \\ & & a_{0,1} & a_{0,2} & a_{0,3} & \cdots & a_{0,n} & \cdots \\ & & & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} & \cdots \\ & & & & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} & \cdots \\ & & & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & & & a_{n-1,n} & \cdots \\ & & & & & & & \ddots \end{array}.$$

• $r < s$ なる整数の組を fix して，

$$\mathbf{a}_{[r,s]} := (a_{i,j})_{r \le i < j \le s}$$

を取り出せば，前節までの話．

• これからの話は，$r \to -\infty$, $s \to \infty$ の極限と思える．

• $\mathcal{B}_\infty$ は “A_∞” 型 crystal の構造を持つ．
（注意：weight に無限和を許す必要アリ）

• 『有限個を除いて $a_{i,j} = 0$』なる Lusztig datum の全体を $\mathcal{B}_\infty^{fin}$ とすれば，これは $\mathfrak{g}(A_\infty)$ の $B(\infty)$ と同型．

• 後で “周期性” を課して，n-reduction ($A_\infty \to A_n^{(1)}$) を考えたいので，今回は “完備化” した Lusztig datum を扱いたい．

○ Chamber weights

$\Lambda_i\ (i \in \mathbb{Z})$：$\mathfrak{g}(A_\infty)$ の fundamental weights

$W = \mathfrak{S}_\infty$：Weyl 群

$$\Gamma_\infty := \bigsqcup_{w \in W,\ i \in \mathbb{Z}} w\Lambda_i \quad \text{(chamber weight の集合)}$$

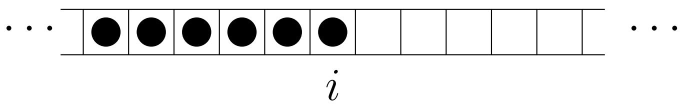
- $\gamma \in w\Lambda_i$ のとき，γ は charge i であるという．

○ Maya 図形による書き換え

$$\Gamma_\infty \quad \leftrightarrow \quad \mathcal{M}_\infty \text{：サイズ} \infty \text{ の Maya 図形}$$

（ただし $-\infty$ 方向には玉が詰まっており，$+\infty$ 方向には空箱が並んでいるとする.）

- $i \in \mathbb{Z}$ に対し

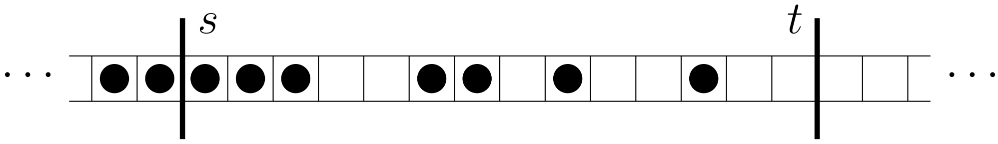
$\Lambda_i \ \leftrightarrow$ 

- $W = \mathfrak{S}_\infty$ は玉の位置の入れ替えで作用.

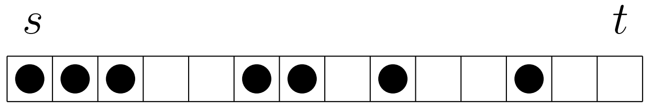
- $K \in \mathcal{M}_\infty$ が charge i

  $\Leftrightarrow$ 玉を左に詰めたとき，上の図のようになる.

- Maya 図形を有限区間で “切る” $\Rightarrow$ 前節の話



$$\Downarrow$$



○ 有限区間の BZ datum の間の関係

$\mathcal{M}_{[r,s]}$：区間 $[r,s]_{\mathbb{Z}}$ の Maya 図形, $\quad n := s - r$

$M_{n,K}(\mathbf{a}_{[r,s]})$ $(K \in \mathcal{M}_{[r,s]})$：区間 $[r,s]_{\mathbb{Z}}$ の BZ datum

Q：(1) $K \in \mathcal{M}_{[r,s]}$ の右に空箱を付け加えて $K \in \mathcal{M}_{[r,s+1]}$ と思ったとき，$M_{n,K}(\mathbf{a}_{[r,s]})$ と $M_{n+1,K}(\mathbf{a}_{[r,s+1]})$ の関係は?

(2) $K \in \mathcal{M}_{[r,s]}$ の左に玉入りの箱を付け加えて得られる Maya 図形 $(r-1)K \in \mathcal{M}_{[r-1,s]}$ を考える．このとき $M_{n,K}(\mathbf{a}_{[r,s]})$ と $M_{n+1,(r-1)K}(\mathbf{a}_{[r-1,s]})$ の関係は？

Proposition .

(1) $M_{n,K}(\mathbf{a}_{[r,s]}) = M_{n+1,K}(\mathbf{a}_{[r,s+1]})$.

（Maya 図形の右に空箱をつけても BZ datum は不変）

(2) $M_{n+1,(r-1)K}(\mathbf{a}_{[r-1,s]}) \mapsto M_{n,K}(\mathbf{a}_{[r,s]})$ は

$$a_{r-1,r} = 0,\ a_{r-1,r+1} = 0, \cdots\ a_{r-1,s} = 0$$

なる代入（$(r-1)$ 行目の数 $= 0$）で与えられる．

（Maya 図形の左から玉入りの箱を取り除く操作）

つまり，
$$\begin{cases} \text{右に空箱を付けていく操作} & : \text{帰納系をなす} \\ \text{左に玉を付けていく操作} & : \text{射影系をなす} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ これらに関する極限として $K \in \mathcal{M}_\infty$ に対する BZ datum $M_K(\mathbf{a})$ を定義する．

(1) はほぼ自明だが，(2) は自明ではない．(tropical side で，かつ Lusztig datum の正値性がないと成り立たない)

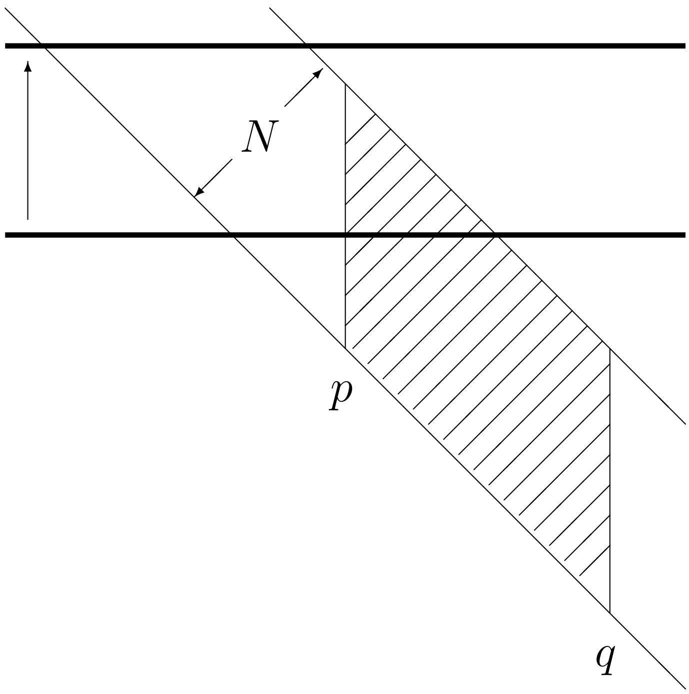
○ 無限区間の BZ datum の性質

先の Proposition + 前節の Corollary の (3)

$\Rightarrow$ K を適当な区間の Maya 図形としたとき,

- 右側に空箱を足しても BZ datum は変わらない.
- 左側に玉を十分たくさん足せば, そこから先は stable.

$\because$) Maya 図形 K に対して, 一番左にある空箱の位置を p, 一番右にある玉の位置を q とする.



$\square$

$\Rightarrow$ 個々の $M_K(\mathbf{a})$ に関して成り立つ性質は, 有限区間の場合のそれに帰着される.

Theorem .

$\mathfrak{gl}(\infty)$ 型 BZ datum $\{M_K(\mathbf{a})\}_{K\in\mathcal{M}_\infty}$ は次を満たす.

(1) 正規化条件

(2) edge inequality

(3) tropical Plücker relations

　とくに，指定された charge を持つ Maya 図形に付随する BZ datum の間に成り立つ関係式は，普遍グラスマン多様体の定義方程式の “tropical 化” に他ならない.

- 本当に “tropical 化” と呼んでいいか？

  Toric degenation との関係は？

  edge inequality の意味は？

§ n-reduction ($A_\infty \to A_{n-1}^{(1)}$)

Definition .
(1) Lusztig datum $\mathbf{a} = (a_{i,j}) \in \mathcal{B}_\infty$ が *n-periodic* であるとは,

$$a_{i,j} = a_{i+n,j+n} \quad \text{for any} \quad i < j$$

が成り立つことをいう. n-periodic な Lusztig datum の全体を $\mathcal{B}_\infty^n$ と書く.

(2) $\mathbf{a} = (a_{i,j}) \in \mathcal{B}_\infty^n$ が *aperiodic* であるとは, 任意の $i < j$ に対し, n 個の成分の組

$$\{a_{i,j},\ a_{i+1,j+1}, \cdots,\ a_{i+n-1,j+n-1}\}$$

の中に少なくとも１つ 0 であるものが存在することをいう. aperiodic な Lusztig datum の全体を $\mathcal{B}_\infty^{n,ap}$ と書く.

Proposition .
(1) $\mathcal{B}_\infty^n$ は "自然な" $A_{n-1}^{(1)}$ 型 crystal stucture を持つ.

(2) $\mathcal{B}_\infty^{n,ap}$ は $\mathcal{B}_\infty^n$ の subcrystal で, $A_{n-1}^{(1)}$ 型の $B(\infty)$ と同型.

Q：$\mathcal{B}_\infty^n$ の crystal sturucture は？

Theorem (部分的に佐垣による).

$$\mathcal{B}_\infty^n \cong \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} (B(\infty) \otimes T_{-m\delta})^{p(m)}.$$

ただし, $p(m)$ は m の分割数.

- $\mathcal{B}_\infty^n$ は "$U_q^-(\widehat{\mathfrak{g}l}_n)$ の crystal base" みたいなもの.
  （($\mathfrak{g}l_n$の center) $\otimes\, t^n$ なる Heisenberg の作用がある）

- この場合でも BZ datum は作れる．
  （$\mathcal{B}_\infty$ の話を n-periodic に制限するだけ）

- 周期性条件の帰結：

$$M_K(\mathbf{a}) = M_{\mathcal{T}_n(K)}(\mathbf{a}) \quad (K \in \mathcal{M}_\infty,\ \mathbf{a} \in \mathcal{B}_\infty^n)$$

$\mathcal{T}_n$：Maya 図形の玉を一斉に（右に）shift する作用素

$\Rightarrow$ BZ datum $\{M_K(\mathbf{a})\}$ は，Maya 図形 $K \in \mathcal{M}_\infty$ ではなく，
$\mathcal{M}_{n-1}^{(1)} := \mathcal{M}_\infty/\langle \mathcal{T}_n \rangle$ に対して定まる．

- $\widehat{s}_i := \prod_{n\in\mathbb{Z}} s_{i+n}$ とすれば，$W(A_{n-1}^{(1)}) \curvearrowright \mathcal{M}_{n-1}^{(1)}$.
  さらに，$\Gamma_{n-1}^{(1)} := \prod_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} W(A_{n-1}^{(1)})\widehat{\Lambda}_i$ とすれば，対応する
  BZ datum $\{M_K(\mathbf{a})\}_{K\in\Gamma_{n-1}^{(1)}}$ は

(1) 正規化条件，(2)EI，(3) TP を満たす．

$\Rightarrow$ “$A_{n-1}^{(1)}$ 版 BZ datum” が構成できたことになる．
（*cf.* Naito-Sagaki）

問題点

(1) $\Gamma_{n-1}^{(1)} \subsetneq \mathcal{M}_{n-1}^{(1)}$
$\Gamma_{n-1}^{(1)}$ には n-core にあたる Maya 図形しか出て来ない．
$\Rightarrow$ それ以外は “いらない情報” か？

(2) BZ datum から Lusztig datum が回復出来るか？
$\Rightarrow$ $A_{n-1}^{(1)}$ の場合は “おそらく” 可能（予想）．

§ 今後の課題

- 超離散可積分系との関係：時間発展？
- 本当の Tropical geometry との関係：Toric degeneration ?