Small quantum group $\overline{U_q(\mathfrak{sl}_2)}$ の表現のテンソル積の直既約分解について

近藤宏樹（東大数理）　斉藤義久（東大数理）

1. Notation. 本講演を通じて q は 1 の原始 $2p$ 乗根（p は 2 以上の整数）とする。Small quantum group $\overline{U_q} = \overline{U_q(\mathfrak{sl}_2)}$ とは、E, F, K, K^{-1} を生成元とし、以下の基本関係式で定義される $\mathbb{C}$ 上の単位元を持つ結合的代数である。

$$K^{\pm}K^{\mp} = 1, \quad KEK^{-1} = q^2 E, \quad KFK^{-1} = q^{-2} F, \quad [E, F] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}},$$

$$K^{2p} = 1, \quad E^p = 0, \quad F^p = 0.$$

$\overline{U_q}$ の Hopf algebra structure は次で与える。

$$\Delta(K^{\pm}) = K^{\pm} \otimes K^{\pm}, \quad \varepsilon(K^{\pm}) = 1, \quad S(K^{\pm}) = K^{\mp},$$

$$\Delta(E) = 1 \otimes E + E \otimes K, \quad \varepsilon(E) = 0, \quad S(E) = -EK^{-1},$$

$$\Delta(F) = K^{-1} \otimes F + F \otimes 1, \quad \varepsilon(F) = 0, \quad S(F) = -KF.$$

$\overline{U_q} - \mathrm{mod}$ で、有限次元左 $\overline{U_q}$ 加群のなす abel 圏を表す。$\overline{U_q}$ が Hopf 代数であることから、$\overline{U_q} - \mathrm{mod}$ は自然にテンソル圏の構造を持つ。

2. Known results. これまでの研究では、q を 1 の奇数乗根、もしくはより強く odd prime 乗根とするものが多い。これは、q が 1 の奇数乗根であれば $\overline{U_q}$ は普遍 R 行列を持つが、偶数乗根の場合には普遍 R 行列を持たない ([F1]) ことに起因すると思われる。しかしながら、最近になって q が 1 の偶数乗根の場合の $\overline{U_q}$ の表現論が、logarithmic CFT ([F1],[F2]) や knot invariant ([MN]) と関係することが指摘されており、注目すべき研究対象となりつつある。

$\overline{U_q}$ は $\mathbb{C}$ 上の有限次元代数なので、任意の有限次元加群は直既約加群の直和に一意的に分解される。同時に $\overline{U_q}$ は Hopf 代数でもある。すなわち有限次元 Hopf 代数である。このことから（$\overline{U_q}$ の特殊性を使うことなく）Frobenius algebra であること（系として projective module と injective module が一致すること）、$\overline{U_q} - \mathrm{mod}$ が rigid tensor category であることが従う。

一方、直既約加群の分類は Suter ([S]) によってなされ、完全なリストが得られている。結果をまとめると次のようになる。
(1) 既約加群は同型を除いて $2p$ 個ある。それらを $\mathcal{X}_t^a$ $(1 \le t \le p, a = \pm)$ と書く。（$\mathcal{X}_t^a$ は t 次元の $\overline{U_q}$ 加群。）
(2) $\overline{U_q} - \mathrm{mod}$ は $\mathcal{C}_p(s)$ $(0 \le s \le p)$ なる $p+1$ 個の block にわかれる。
(3) $\mathcal{C}_p(0)$ および $\mathcal{C}_p(p)$ は semisimple で、それぞれ唯一の simple object $\mathcal{X}_p^-$, $\mathcal{X}_p^+$ を持つ。さらに $\mathcal{X}_p^{\pm}$ は projective かつ injective でもある。
(4) $1 \le s \le p-1$ のとき、$\mathcal{C}_p(s)$ は 2 つの simple objects $\mathcal{X}_s^+$, $\mathcal{X}_{p-s}^-$ をもち、全体としては semisimple ではない。indecomposable object（正確にはその同型類）は $A_1^{(1)}$ 型の positive root を用いて次のようにパラメトライズされる。
(i) α が real positive root のとき：α に対して 2 つの indecomposable object が存在する。とくに α が simple root のときは、simple object とその projective

cover が対応する。($\alpha = \alpha_0$ or α_1 なので、それぞれに $\mathcal{C}_p(s)$ の simple objects $\mathcal{X}_s^+$, $\mathcal{X}_{p-s}^-$ が対応する。)
(ii) α が imaginary positive root のとき：この場合 $\alpha = n\delta$ ($n \in \mathbb{Z}_{>0}$) と書ける。正整数 n と $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の点 $z = [z_1 : z_2]$ を決めるごとに、2つの indecomposable projective object が存在する。それらを $E_s^+(n,z)$, $E_{p-s}^-(n,z)$ と書く。

また上記分類の結果、tame な表現型を持つことがわかる。

3. Main results. 本講演の主結果は、Suter ([S]) によって分類された各直既約 $\overline{U_q}$ 加群に対し、相互の間のテンソル積の直既約分解公式を得たことである。

紙数の関係上、全てをここに書き下すことは出来ないので、その一部（最も複雑な $E_s^+(n,z)$ のタイプ同士のテンソル積の場合）を書くに止める。

Theorem 1. $1 \le s,t \le p-1$, $m,n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $z = [z_1 : z_2]$, $w = [w_1 : w_2] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ とする。このとき

$$
\begin{aligned}
& E_s^+(n,[z_1:z_2]) \otimes E_t^+(m,[w_1:w_2]) \\
\cong\ & \Big\{ \Big(\oplus_{r \in I^{(p)}_{s;p-t}[1]} \mathcal{P}_r^- \Big) \oplus \Big(\oplus_{r \in I^{(p)}_{s;p-t}[-1]} \mathcal{P}_{p-r}^+ \Big) \\
& \quad \oplus \Big(\oplus_{r \in I^{(p)}_{s;t}[1]} \mathcal{P}_r^+ \Big) \oplus \Big(\oplus_{r \in I^{(p)}_{s;t}[-1]} \mathcal{P}_{p-r}^- \Big) \Big\}^{mn} \oplus \Big(\oplus_{r \in I^{(p)}_{s;t}[0]} \mathcal{V}_r^{n,m}(z,w) \Big).
\end{aligned}
$$

ただし、$\mathcal{P}_r^\pm$ は $\mathcal{X}_r^\pm$ の projective cover で、$I^{(p)}_{s;t}[a]$ ($a = 0, \pm 1$) は $[0,p] \cap \mathbb{Z}$ のある部分集合。また

$$
\mathcal{V}_r^{n,m}(z,w) = \begin{cases} E_r^+(l,[r]z/[s]) \oplus E_{p-r}^-(l,-[r]z/[s]) \oplus \left(\mathcal{P}_r^+\right)^{mn-l}, & \\ & \text{if } [t]z_2 w_1 = (-1)^{s-1}[s] z_1 w_2, \\ \left(\mathcal{P}_r^+\right)^{mn}, & \text{otherwise.} \end{cases}
$$

ただし $l = \min\{m,n\}$.

テンソル積の直既約分解公式を用いて、次が得られる。

Corollary 2. (1) $M \in \mathcal{C}_p(s)$ のとき、$M \otimes E_t^+(n,z) \cong E_t^+(n,(-1)^{s-1}z) \otimes M$.
(2) $\overline{U_q}$ の Hopf algebra sturucture から自然に定まるテンソル圏の構造に関して、$\overline{U_q} - \mathrm{mod}$ は braided ではない。

References

[F1] B. Feigin, A. Gainutdinov, A. Semikhatov and I. Tipunin, *Modular group representations and fusion in logarithmic conformal field theories and in the quantum group center*, Comm. Math. Phys. 265 (2006), 47-93.

[F2] B. Feigin, A. Gainutdinov, A. Semikhatov and I. Tipunin, *The Kazhdan-Lusztig correspondence for the representation category of the triplet W-algebra in logorithmic conformal field theories.* Theoret. and Math. Phys. 148 (2006), no. 3, 1210–1235

[MN] J. Murakami and K. Nagatomo, *Logarithmic knot invariants arising from restricted quantum groups* arXiv:0705.3702.

[S] R. Suter, *Modules over $U_q(\mathfrak{sl}_2)$*, Comm. Math. Phys. 163 (1994), 359-393.