HECKE 代数の多項式表現について
（直交多項式への HECKE 代数からのアプローチ）

斉藤義久（東京大学大学院数理科学研究科）

1. １変数直交多項式（古典論）

1.1. **直交多項式とは.**

最初に Introduction を兼ねて，１変数直交多項式に関する復習をする．

Definition 1.1. $f = f(x)$, $g = g(x)$ を１変数の多項式として，

$$\int_a^b w(x)dx > 0$$

なる $w(x)$ に対し，

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$$

とおく．多項式の列 $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ が，(1)　$p_n(x)$ は n 次多項式．(2)　$\langle p_m, p_n\rangle = \lambda_m \delta_{m,n}$（$\lambda_m$ は 0 でない定数）を満たすとき，$\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ を**直交多項式系** (OPS) という．また $w(x)$ を**重み関数** (weight function) という．

例：Hermite 多項式 $H_n(x)$

$a = -\infty$，$b = \infty$，$w(x) = e^{-x^2/2}$ とする．このとき

$$\begin{aligned} H_n(x) &= (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2/2}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k (2k-1)!! \begin{pmatrix} n \\ 2k \end{pmatrix} x^{n-2k} \end{aligned}$$

とすると、

$$\langle H_m, H_n\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2/2}dx = m!\sqrt{2\pi}\delta_{m,n}.$$

証明は部分積分を繰り返し用いることで、容易にできる．

その他詳しく述べることは止めるが，Legendre，Chebyshev，Laguerre，Jacobi など種々の直交多項式系が知られている．

1.2. **直交多項式の性質.**

• 直交多項式の満たす方程式

古典的に知られている直交多項式は，２階の微分 (*resp.* 差分，q-差分) 方程式を満たす．

○ Hermite 多項式 $H_n(x)$：

$$u'' - xu' + nu = 0 \quad (\text{Hermite の微分方程式}). \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx}\right)u = -nu.$$

○ Jacobi 多項式 $J_n(x;\alpha,\beta)$：

$$J_n(x;\alpha,\beta) := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{n!} \binom{n}{k} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+k+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\alpha+k+1)} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k.$$

$$\int_{-1}^{1} J_m(x;\alpha,\beta)J_n(x;\alpha,\beta)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx = C_m\delta_{m,n}.$$

$$(1-x^2)u'' + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]u' + n(\alpha+\beta+n+1)u = 0$$

(Jacobi の微分方程式)

$$\Leftrightarrow \quad \left((1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]\frac{d}{dx}\right)u = -n(\alpha+\beta+n+1)u.$$

etc.

これらの多項式は

『上記微分方程式の多項式解として一意的に特徴付けられる』 $(*)$

という共通の性質を持つ．さらに

$\big(n$ **に依存しない共通の微分作用素**$\big)u = \big(n$ **に依存する数値（固有値）**$\big)u$

の形をしている．そこで，少々乱暴ではあるが次のような問いをたててみよう．

Q：このような性質を持つ微分方程式（微分作用素）を見つける方法は？

ここではあえてこの問いには答えずに話を先に進める[1]．とりあえず問題として頭の片隅にでも置いておいてもらえれば十分である．

Remark. 一般には微分方程式だけでなく、差分方程式や $q-$ 差分方程式も現れる．

その他の直交多項式の性質

● 直交多項式の満たす漸化式（３項間漸化式）

$\{p_m(x)\}$ を直交多項式系とするとき，簡単な計算から

$$\langle p_m, xp_n\rangle = \langle xp_m, p_n\rangle \begin{cases} \neq 0, & (m = n\pm 1), \\ = 0, & (m \neq n, n\pm 1) \end{cases}$$

であることがわかる．したがって

$$xp_n(x) = a_np_{n+1}(x) + b_np_n(x) + c_np_{n-1}(x)$$

[1]答えを先走って言うと，多変数の直交多項式の場合には，背後にある代数的構造（Hecke 代数）を用いて，このような微分作用素（の族）を作り出すことが出来る，というカラクリになっている．

が成り立つ（a_n, b_n, c_n は適当な定数）．これを $\{p_m(x)\}$ の３項間漸化式という．

１変数直交多項式の理論において，３項間漸化式は次の意味で基本的である．

Theorem 1.2. 多項式系 $\{p_m(x)\}$ が３項間漸化式を満たすことと，直交多項式系であることは同値である[2].

1.3. **Askey-Wilson 多項式.** １変数直交多項式の中で最も "generic" なクラスである Askey-Wilson 多項式について簡単に紹介する.（なぜ最も "generic" なのか？については後で述べることにする.）

Definition 1.3.

$$\begin{aligned} P_n(z) &= P_n(a,b,c,d|z) \\ &:= \frac{(ab,ac,ad;q)_n}{a^n}\,{}_4\varphi_3\left(\begin{matrix} q^{-n}, q^{n-1}abcd, az, az^{-1} \\ ad, ac, ad \end{matrix}\;;q,q\right) \end{aligned}$$

を（n 次）*Askey-Wilson* 多項式という．ただし

$$(a;q)_k := \prod_{l=0}^{k-1}(1-aq^l), \quad (a_1,\cdots,a_r;q)_k := \prod_{j=1}^{r}(a_j;q)_k.$$

また $0<q<1$ として

$${}_4\varphi_3\left(\begin{matrix} a_1,a_2,a_3,a_4 \\ b_1,b_2,b_3 \end{matrix}\;;q,z\right) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1,a_2,a_3,a_4;q)_k}{(b_1,b_2,b_3;q)_k}\frac{z^k}{(q;q)_k}.$$

これは $z \leftrightarrow z^{-1}$ ついて対称な z に関する Laurent 多項式である．したがって P_n は $x := (z+z^{-1})/2$ についての n 次多項式となる．

- **直交性**

weight function $w(x)$ が存在して，

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)w(x)dx = h_n\delta_{m,n}.$$

（$w(x)$ や，定数 h_n の具体形も知られている[3].）

- $q-$ **差分方程式**

$$\begin{aligned} A(z)\big(P_n(qz)-P_n(z)\big) + A(z^{-1})\big(P_n(z)-P_n(q^{-1}z)\big) \\ = q^{-n}(1-q^n)(1-abcdq^{n-1})P_n(z). \end{aligned}$$

---

[2] この定理は「Favard の定理」と呼ばれる非常に有名な定理である．Favard は１９２０年代後半から１９６０年代にかけて活躍した人であるが，筆者は古典的な直交多項式の理論に関しては門外漢なので，実はどこで最初に証明されたのかは知らない．証明に関しては，例えば Chihara ([Chi]) に出ている．

[3] 上式は $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ かつ $\max\{|a|,|b|,|c|,|d|\}<1$ の仮定のもとに成り立つ式．a,b,c,d を複素数と思う場合には上の積分を複素積分に読み替えた上で，解析接続を用いた議論が必要．

ただし

$$A(z) := \frac{(1-az)(1-bz)(1-cz)(1-dz)}{(1-z^2)(1-qz^2)}.$$

• **3 項間漸化式**

$$xP_n(x) = a_nP_{n+1}(x) + b_nP_n(x) + c_nP_{n-1}(x)$$

(a_n, b_n, c_n の具体形も知られている．)

以上は前節で述べた「直交多項式に関して一般的に成り立つ性質」であるが，Askey-Wilson 多項式が持つ著しい性質は，次に述べる「双対性」である．

• **双対性** (Duality)

Definition 1.4. 2 つの多項式系 $\{p_n(x)\}$ と $\{p_n^*(x)\}$ が，ある点列 $\{x_n\}$, $\{x_n^*\}$ に対し，

$$p_n(x_m) = p_m^*(x_n^*)$$

を満たすとき，2 つの多項式系は**双対**であるという．

Askey-Wilson 多項式は，この意味で自己双対であることが知られている．即ち，

$$a^* := \sqrt{abcd/q}, \qquad b^* := \sqrt{abq/cd},$$

$$c^* := \sqrt{acq/bd}, \qquad d^* := \sqrt{adq/bc},$$

$$E_n(z) := a^nP_n(a,b,c,d|z)/(ab,ac,ad;q)_n, \quad E_n^*(z) := E_n(a^*,b^*,c^*,d^*|z)$$

としたとき，

$$E_n(z_m) = E_m^*(z_n^*) \qquad (z_k := aq^k,\ z_k^* := a^*q^k)$$

が成り立つ．

また，自己双対な直交多項式に関しては次が知られている．

Theorem 1.5 (Leonard [L]). *3 項間漸化式を満たす双対な 1 変数多項式系は，本質的に Askey-Wilson 多項式に限られる．*

ここで「本質的に Askey-Wilson 多項式に限られる」とは，Askey-Wilson 多項式，もしくはその退化によって得られるものに限られるという意味である．したがって，この結果と Theorem 1.2 をあわせれば,「Askey-Wilson 多項式は最も一般的な双対な直交多項式系である」と言うことができる．

• **Askey スキーム**

知られている古典的な直交多項式は，全て Askey-Wilson 多項式からの退化によって得られる．この退化図式を Askey **スキーム**という ([KS] 参照)．Askey スキームには数十種類の直交多項式が現れるので，全てを列挙することは出来ないが，さきほど現れた Jacobi 多項式や Hermite 多項式も，Askey-Wilson 多項式からの退化によって得られる．この意味で Askey-Wilson 多項式は最も generic な直交多項式系であると言ってよいわけである．

例：Askey-Wilson → Jacobi

$$a = q^{(2\alpha+1)/4}, b = q^{(2\alpha+3)/4}, c = -q^{(2\beta+1)/4}, d = -q^{(2\beta+3)/4}$$

とおいて，適当な normalization を行った後，$q \to 1-0$ の極限をとる．

$$\lim_{q \to 1-0} \frac{(q^{(2\alpha+1)/4})^n}{(q, -q^{(\alpha+\beta+1)/2}, -q^{(\alpha+\beta+2)/2}; q)_n} P_n(x) = J_n(x; \alpha, \beta).$$

Jacobi → Hermite：$\alpha = \beta$ とおいて，以下の形の $\alpha \to \infty$ の極限をとる．

$$\lim_{\alpha \to \infty} \alpha^{-n/2} J_n\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}; \alpha, \alpha\right) = c_n H_n(x).$$

Remark. Askey-Wilson → Jacobi の過程で現れた

$$P_n(x; \alpha, \beta) := \frac{(q^{(2\alpha+1)/4})^n}{(q, -q^{(\alpha+\beta+1)/2}, -q^{(\alpha+\beta+2)/2}; q)_n} P_n(x)$$

を **continuous q-Jacobi 多項式**と呼ぶ．また special case として

$$a = t^{1/2}, b = t^{1/2}q^{1/2}, c = -t^{1/2}, d = -t^{1/2}q^{1/2}$$

としたものは，t と q を独立なパラメータとする直交多項式であるが，これを **Rogers の q-超球関数**と呼ぶ．適当な nomalization の下に、Rogers の q-超球関数は Macdonald 多項式の１変数版そのものになっていることが知られている．

2. Macdonald-Cherednik 理論

2.1. **概要**. 前節の１変数の場合を踏まえて，直交多項式の理論の多変数化を考えよう．最初に注意しておきたいことは，１変数の場合には

直交性 $\Leftrightarrow$ ３項間漸化式 （Faverd の定理）

なる性質があったことである．この性質によって，与えられた多項式系に対して weight function の存在等を議論することをせずとも，３項間漸化式を考えるだけで全てが済んでしまっていた．しかし多変数の場合には３項間漸化式に当たるものが知られていないため，話がずっと難しくなる[4].

以下で Macdonald-Cherednik による，Hecke algebra を用いた直交多項式の多変数化を紹介するが，これはあくまで１つのアプローチの方法なのであって，唯一の方法ではないことに注意されたい．他にも古典的（解析的）方法，量子対称空間を用いる方法等，いろいろある．

構成のアイデア

以下記号が煩雑になるので，最初に構成の “レシピ” を大雑把に紹介しておこう．

(1) (double affine) Hecke algbera の多項式表現を構成する．
(2) double affine Hecke algbera の中に，可換な subalgebra が存在することを利用して，可換な q-差分作用素の族を作り出す（1.2 節の $(*)$ に対応）．

[4]多変数版の３項間漸化式の類似物を考える試みは，なされてはいるものの（例えば [DX] を挙げておく），１変数のときと比べるとうまくはいっていないようである．

(3) 可換な q-差分作用素の族に対する同時固有関数として，Macdonald（型）多項式を定式化.
(4) 直交性，双対性，*etc.* を Hecke algbera を使って説明.

このような構成法には（当然だが）メリットとデメリットがある.

メリット

・（枠組みが出来上がれば）多変数化が容易（変数の数≒ルート系のランク）
・ルート系を取り替えることで，いろいろなバリエーションを考えられる.
(A 型：Macdonald 多項式，BC_1 型：Askey-Wilson 多項式)
・双対性の説明が容易.

デメリット

・現時点では全ての直交多項式に適用出来るわけではない.

Remark . このデメリットに関しては，degeneration（退化）を考えることで，ある程度カバーすることができる．退化については後でもう一度触れる.

2.2. A **型の場合 (Macdonald 多項式の場合).** 最も単純な A 型の場合を例にとり，前節で述べたレシピを説明しよう．まず出発点として天下りに A 型の double affine Hecke algebra の定義を与える.

Definition 2.1. $\mathfrak{gl}_n$ 型 *double affine Hecke algebra* $\mathcal{H}_{da}(\mathfrak{gl}_n)$ とは，以下の生成元と関係式で定義される $\mathbb{C}(q,t)$ 上の単位元を持つ結合代数のことをいう.

○ 生成元：$T_1,\cdots,T_{n-1};\quad Y_1^{\pm},\cdots,Y_n^{\pm};\quad X_1^{\pm},\cdots,X_n^{\pm}.$

○ 関係式：

$$(T_i-t)(T_i+t^{-1})=0 \quad (1\le i\le n-1), \tag{1}$$

$$T_iT_j=T_jT_i\ (|i-j|>1),\quad T_iT_{i+1}T_i=T_{i+1}T_iT_{i+1}\ (1\le i\le n-2), \tag{2}$$

$$Y_iY_j=Y_jY_i,\quad X_iX_j=X_jX_i \quad (1\le i,j\le n), \tag{3}$$

$$T_i^{-1}Y_iT_i^{-1}=Y_{i+1},\quad T_iX_iT_i=X_{i+1} \quad (1\le i\le n-1), \tag{4}$$

$$T_iY_j=Y_jT_i,\quad T_iX_j=X_jT_i \quad (j\ne i,i+1), \tag{5}$$

$$Y_2^{-1}X_1Y_2X_1^{-1}=T_1^2, \tag{6}$$

$$\left(\prod_{i=1}^n Y_i\right)X_j=qX_j\left(\prod_{i=1}^n Y_i\right),\quad \left(\prod_{i=1}^n X_i\right)Y_j=q^{-1}Y_j\left(\prod_{i=1}^n X_i\right). \tag{7}$$

• $\mathcal{H}_{da}(\mathfrak{gl}_n)$ に含まれる２つの affine Hecke algbera

$\mathcal{H}_{da}(\mathfrak{gl}_n)$ の定義はややこしく，はっきり言って一度ではとても覚えられない．しかし次のような見方をすると，それなりに見やすくなる．

$$\mathcal{H}_a^{(1)} := \langle T_1, \cdots, T_{n-1}, Y_1^{\pm}, \cdots, Y_n^{\pm} \rangle, \quad \mathcal{H}_a^{(2)} := \langle T_1, \cdots, T_{n-1}, X_1^{\pm}, \cdots, X_n^{\pm} \rangle$$

とおく．前者は (1),(2) および (3)∼(5) の第１式を定義関係式とする $\mathcal{H}_{da}(\mathfrak{gl}_n)$ の subalgebra で，後者は前者は (1),(2) および (3)∼(5) の第２式を定義関係式とする $\mathcal{H}_{da}(\mathfrak{gl}_n)$ の subalgebra であり，両者はともに $\mathfrak{gl}_n$ 型 affine Hecke algebra に同型である．したがって次のような構造を持つ．

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_a^{(1)} &= \langle T_1, \cdots, T_{n-1} \rangle \ltimes \langle Y_1^{\pm}, \cdots, Y_n^{\pm} \rangle \\ &\cong \mathcal{H}(A_{n-1}) \ltimes (\mathfrak{gl}_n \text{ の weight lattice の群環}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_a^{(2)} &= \langle T_1, \cdots, T_{n-1} \rangle \ltimes \langle X_1^{\pm}, \cdots, X_n^{\pm} \rangle \\ &\cong \mathcal{H}(A_{n-1}) \ltimes (\mathfrak{gl}_n \text{ の weight lattice の群環}) \end{aligned}$$

つまり，Double affine Hecke algebra とは，

「有限型 Hecke algbera $\mathcal{H}(A_{n-1})$ を共有する
２つの affine Hecke algebra が混ざったもの」

であり，混じり方 (translation parts の交換関係) を (6)，(7) が記述している，と見ることができる．

唐突ではあるが，後で必要になる事柄を一つ準備しておく．

$$\pi := Y_1^{-1} T_1 \cdots T_{n-1}$$

とおくと，

$$\mathcal{H}_a^{(1)} = \langle T_1, \cdots, T_{n-1}, \pi \rangle$$

であり，その場合の定義関係式は (1),(2) および

$$\pi T_i = T_{i+1} \pi \quad (1 \le i \le n-2)$$

である．

• PBW type theorem

$\mathcal{H}_{da}(\mathfrak{gl}_n)$ の構造に関しては，次の定理が基本的である．

Theorem 2.2 (Cherednik)**.**

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{da}(\mathfrak{gl}_n) &= \bigoplus_{\lambda,\mu,w} \mathbb{C}(q,t) X^{\lambda} T_w Y^{\mu} \\ &= \bigoplus_{\lambda,\mu,w} \mathbb{C}(q,t) Y^{\mu} T_w X^{\lambda}. \end{aligned}$$

ただし $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n), \quad \mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対し

$$X^{\lambda} = X_1^{\lambda_1} \cdots X_n^{\lambda_n}, \quad Y^{\mu} = Y_1^{\mu_1} \cdots Y^{\mu_n}.$$

また $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r} \in \mathfrak{S}_n$ *(reduced expression)* に対し，

$$T_w = T_{i_1} \cdots T_{i_r}.$$

● 多項式表現の構成

$\mathcal{H}_a^{(1)}$ の 1 次元表現 $\mathbf{1} := \mathbb{C}(q,t)$ を次で定める：

$$T_i \mapsto t\ (1 \le i \le n-1), \qquad Y_j \mapsto t^{n-2j}\ (1 \le j \le n).$$

さらに誘導表現 $\mathcal{H}_{da}(\mathfrak{gl}_n) \otimes_{\mathcal{H}_a^{(1)}} \mathbf{1}$ を考えるが，PBW type theorem から，ベクトル空間としては $\mathbb{C}(q,t)$ 上の Laurent 多項式環と同型であることがわかる．

$$\mathcal{H}_{da}(\mathfrak{gl}_n) \otimes_{\mathcal{H}_a^{(1)}} \mathbf{1} \cong \mathbb{C}(q,t)[X_1^{\pm 1}, \cdots, X_n^{\pm 1}].$$

記号の簡略化のために $A := \mathbb{C}(q,t)[X_1^{\pm 1}, \cdots, X_n^{\pm 1}]$ と書こう．このとき次がわかる．

Lemma 2.3. $\mathcal{H}_{da}(\mathfrak{gl}_n) \curvearrowright A$ は *faithfull.*

各生成元の作用の具体形は次のようになる：

$$T_i.f = \left(t\sigma_{i,i+1} + \frac{(t-t^{-1})X_{i+1}}{X_i - X_{i+1}}(\sigma_{i,i+1} - 1)\right) f \quad \text{(Demazure-Lusztig 作用素)}$$

$$\pi.f(X_1, \cdots, X_n) = f(X_2, X_3, \cdots, X_n, q^{-1}X_1),$$

$$X_i.f = X_i f \quad \text{(掛け算作用素)}.$$

ただし $f = f(X_1, \cdots, X_n) \in A$ で，$\sigma_{i,j}$ は X_i と X_j の入れ替えを表す．

● 非対称 Macdonald 多項式

Proposition 2.4. Y_i の A への作用は *semisimple.*

したがって Y_i たちは同時対角化可能であり，次が従う．

Proposition 2.5. 次のような $E_\lambda(X_1, \cdots, X_n; t, q) \in A$ が一意的に定まる（これを**非対称 Macdonald 多項式**と呼ぶ）．
(1) $E_\lambda = X^\lambda + (\textit{lower term}).$
(2) f を n 変数の *Laurent* 多項式とするとき

$$f(Y)E_\lambda = f(-r(\lambda))E_\lambda.$$

ここで右辺に現れる $f(-r(\lambda))$ は，f と λ から定まるある定数である（つまり E_λ は，作用素 $f(Y)$ の，固有値 $f(-r(\lambda))$ の固有関数となる）[5]．

Remark . $Y_i \curvearrowright A$ は **Dunkl-Cherednik operator** と呼ばれる可換な作用素の族であるが，これらは q-差分作用素ではない．

● (対称)Macdonald 多項式

前節で現れた Dunkl-Cherednik operator から可換な q-差分作用素の族を得るためには対称化を行わなければならない．その結果得られる固有関数は対称多項式になるが，これがよく知られた Macdnald 多項式である．

Lemma 2.6. (1) g を n 変数の対称式とするとき，$g(Y)$ の作用に関して $A_0 := \mathbb{C}(q,t)[X_1, \cdots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$ は不変部分空間.
(2) $g(Y)$ の A_0 への制限は q-差分作用素.

[5] ここでは「E_λ が $f(Y)$ の固有関数である」ことを認識してもらえれば十分なので，詳細は Macdonald の教科書 ([M5]) に譲ることとし，$f(-r(\lambda))$ の正確な定義はしないことにする（正確な定義のためには affine Weyl 群に関する言葉の準備が必要になる）．ただしこの記法は今後の議論で用いられる．

Proposition 2.7. 次のような $P_\lambda(X_1,\cdots,X_n;t,q)\in A_0$ が一意的に定まる（これを**（対称）Macdonald 多項式**と呼ぶ）.
(1) $P_\lambda = m_\lambda + (lower\ term)$　（m_λ：*monomial symmetric polynomial*）
(2) g を n 変数の対称式とするとき

$$g(Y)P_\lambda = g(-\lambda-\rho)P_\lambda.$$

これまでの議論をまとめると，**Hecke 代数の表現論を用いて，q-差分作用素 (の可換族) と，その（同時）固有関数として Macdonald 多項式を得た**ことになる．これは p.2 の Q に対する一つの解答と言ってよい.

しかしこれまでの議論で行ったことはレシピの (3) までに過ぎず，得られた固有関数（Macdonald 多項式）が直交性や双対性を持つかどうかは明らかではない．もちろんどちらも重要な事柄ではあるのだが，紙数の都合もあり全てを書いていると長くなりすぎるので，直交性に関する議論は Macdonald の教科書 [M5] 等に譲る事とし，このノートでは以下双対性について説明したい.

• 双対性

Proposition 2.8. $\mathbb{C}(q,t)$-*linear map* $\omega : \mathcal{H}_{da}(\mathfrak{g}l_n)\to\mathcal{H}_{da}(\mathfrak{g}l_n)$

$$\omega(X^\lambda T_w Y^\mu) = Y^{-\mu}T_{w^{-1}}X^{-\lambda}$$

は $\mathbb{C}(q,t)$-*algebra* の *anti-isomorphism*. ω を **duality anti-isomorphism** と呼ぶ.

$\mathrm{Ev}:\mathcal{H}_{da}(\mathfrak{g}l_n)\to\mathbb{C}(q,t)$ を $\mathrm{Ev}(h) := h(1_A)(-\rho)$ とする（ρ は positive root の half sum）．また $h,\ h'\in\mathcal{H}_{da}(\mathfrak{g}l_n)$ に対し，$B(h,h') := \mathrm{Ev}(\omega(h')h)$ と定める．このとき定義と ω の性質から次が従う.

Proposition 2.9. $B(h,h') = B(h',h)$.

非対称 Macdonald 多項式 E_λ, E_μ に対して

$$h = E_\lambda(X),\quad h' = E_\mu(X)\in A\subset\mathcal{H}_{da}(\mathfrak{g}l_n)$$

とおく．定義から

$$\begin{aligned} B(E_\lambda(X),E_\mu(X)) &= \mathrm{Ev}(E_\mu(Y^{-1})E_\lambda(X)) \\ &= \big((E_\mu(Y^{-1}).E_\lambda(X)\big)(-\rho) \\ &= E_\mu(r(\lambda))E_\lambda(-\rho). \end{aligned}$$

同様にして $B(E_\mu(X),E_\lambda(X)) = E_\lambda(r(\mu))E_\mu(-\rho)$ を得るが，Proposition 2.9 より

$$E_\mu(r(\lambda))E_\lambda(-\rho) = E_\lambda(r(\mu))E_\mu(-\rho)$$

が成り立つ．$\widetilde{E}_\lambda(X) := E_\lambda(X)/E_\mu(-\rho)$ とおくことで次を得る.

Proposition 2.10. $\widetilde{E}_\lambda(r(\mu)) = \widetilde{E}_\mu(r(\lambda))$.　**(非対称 Macdonald 多項式の双対性)**

対称の場合も同様の論法で双対性が示される．まず上に定めた B を用いて

$$P_\mu(\lambda+\rho)P_\lambda(\rho) = P_\lambda(\mu+\rho)P_\mu(\rho)$$

がわかる．$\widetilde{P}_\lambda(X) := P_\lambda(X)/P_\mu(\rho)$ とおくことで次が従う.

Proposition 2.11. $\widetilde{P}_\lambda(\mu+\rho) = \widetilde{P}_\mu(\lambda+\rho)$.　**（Macdonald 多項式の双対性）**

2.3. **他の型の場合.** 2.1 節のレシピに従って構成すればよい．まず double affine Hecke algbera $\mathcal{H}_{da}$ を定義しよう．

$R_a^{(1)}$, $R_a^{(2)}$ を 2 つの affine ルート系とする．それぞれの finite part を $R_f^{(1)}$, $R_f^{(2)}$ とすると，対応する affine Hecke algebra は係数環を $\mathcal{A}$ として

$$\mathcal{H}(R_a^{(i)}) \cong \mathcal{H}(R_f^{(i)}) \ltimes \mathcal{A}[Q(R_f^{(i)\vee})] \quad (i = 1, 2)$$

なる分解を持つ．ただし $Q(R_f^{(i)\vee})$ は有限型ルート系 $R_f^{(i)\vee}$ の root lattice, $\mathcal{A}[Q(R_f^{(i)\vee})]$ はその群環を表す．このとき $\mathcal{H}(R_f^{(1)}) \cong \mathcal{H}(R_f^{(2)})$ を仮定する（以後これを $\mathcal{H}_f$ と書く）．

この条件を満たす 2 つの affine Hecke algbera を以下のような方法で "混ぜる"：

$$\mathcal{H}_{da} := \mathcal{H}(R_a^{(1)}) \ltimes \mathcal{A}[Q(R_a^{(2)\vee})]$$

i.e.

$$T_i X^\lambda - X^{s_i(\lambda)} T_i = \mathbf{b}(t_i, t_i^*; X^{-\alpha_i^\vee})(X^\lambda - X^{s_i(\lambda)}).$$

ただし X^λ は $\lambda \in Q(R_a^{(2)\vee})$ に対応する群環の元，$\mathbf{b}(u_1, u_2; z) := \big(u_1 - u_1^{-1} + (u_2 - u_2^{-1})z\big)/(1 - z^2)$ とする．この関係式は **Lusztig's relations** と呼ばれる．

定義から $\mathcal{H}(R_a^{(1)})$ は canonical に $\mathcal{H}_{da}$ に埋め込まれている．もう一方の $\mathcal{H}(R_a^{(2)})$ も次のようにして埋め込まれている：

$$\mathcal{H}(R_a^{(2)}) \cong \mathcal{H}_f \ltimes \mathcal{A}[Q(R_f^{(2)\vee})] \subset \mathcal{H}(R_a^{(1)}) \ltimes \mathcal{A}[Q(R_a^{(2)\vee})] = \mathcal{H}_{da}.$$

$\mathcal{H}(R_a^{(1)})$ の trivial 表現 $\mathbf{1}$ を全体に誘導することで，多項式表現

$$\mathcal{H}_{da} \otimes_{\mathcal{H}(R_a^{(1)})} \mathbf{1} \cong \mathcal{A}[Q(R_a^{(2)\vee})]$$

が得られる．$Q(R_a^{(2)\vee})$ の null root を c と書くとき，$q := X^c$ は $\mathcal{H}_{da}$ の center に含まれる[6]．そこで，以後 q を "数" として扱うこととする．

$$\mathcal{H}_{da} \otimes_{\mathcal{H}(R_a^{(1)})} \mathbf{1} \cong \mathbb{A}[Q(R_f^{(2)\vee})] \quad (\mathbb{A} := \mathcal{A}[q, q^{-1}]).$$

$\mathcal{H}(R_a^{(1)})$ の translation part の元を Y^μ $(\mu \in Q(R_f^{(1)\vee}))$ と書こう．Y^μ たちは多項式環 $\mathbb{A}[Q(R_f^{(2)\vee})]$ に作用する互いに可換な作用素で，しかも semi-simple である．したがって同時対角化可能であるが，この同時固有関数として一般のルート系に付随する非対称 Macdonald 型多項式が定まる．

A 型の場合と同様に，この Y^μ は q-差分作用素ではないが,（有限）Weyl 群に関する対称化を行うことによって q-差分作用素が得られる．これを Macdonald 型作用素と呼び，それらの同時固有関数を対称 Macdonald 型多項式と呼ぶ．また双対性も duality anti-isomorphism の存在から自動的に従う．

3. Degeneration(退化)

前節で紹介した double affine Hecke algebra の表現論を用いる方法では q-差分方程式しか扱うことが出来ず，Hermite 多項式や Jacobi 多項式等の微分方程式によって統制される直交多項式，あるいは差分方程式によって統制される直交多項式を扱うことが出来ない．しかし代数の退化 (degeneration) を導入することにより，一部の直交多項式に対しては代数的な取り扱いが可能となる．

[6] より正確には $q = X^c$ は center の生成元となる．

3.1. **微分極限 (trigonometric degeneration).** q-差分を微分に退化させるには

$$\frac{f(qx)-f(x)}{(q-1)x} \xrightarrow{q\to 1} \frac{df(x)}{dx}$$

なる極限を考えればよい．ナイーブにはこのような極限操作をうまく実現するように代数自身を退化させれば良いのだが，一般的かつまじめにやろうとすると（completion 等）いろいろややこしい議論が必要になるので，ここでは $\mathcal{H}_{da}(\mathfrak{gl}_n)$ を例にとり，細かいことを無視した “気持ち” を紹介したい．

まず登場人物を思い出しておく．

$$\mathcal{H}_{da}(\mathfrak{gl}_n) = \langle T_1,\cdots,T_{n-1},Y_1^{\pm},\cdots,Y_n^{\pm},X_1^{\pm},\cdots,X_n^{\pm}\rangle.$$

$\mathcal{H}_{da}(\mathfrak{gl}_n) \curvearrowright A = \mathbb{C}(q,t)[X_1^{\pm 1},\cdots,X_n^{\pm 1}]$ は faithfull だったので，$\mathcal{H}_{da}(\mathfrak{gl}_n) \subset \mathrm{End}(A)$ としてよい（埋め込み方は Lemma 2.3 の直後の作用の具体形を参照）．

そこで

$$q=\exp(-\varepsilon\kappa),\ Y_j=\exp(-2\varepsilon y_j),\ t=\exp(\varepsilon k),\quad (k\in\mathbb{C})$$

とおいて ε に関して展開する．このとき各生成元は End 環の元として

$$\begin{aligned} T_i &= t\sigma_i + \frac{(t-t^{-1})X_{i+1}}{X_i - X_{i+1}}(\sigma_i - 1) \\ &= \sigma_i + O(\varepsilon) \\ Y_j &= 1 - 2\varepsilon y_j + O(\varepsilon^2) \\ X_j & \quad\ (\text{そのまま}) \end{aligned}$$

と展開される．σ_i , y_j, $X_j^{\pm}$, κ を新たな生成元と思って，これらの生成する代数を考えたいのだが，その交換関係は以下のように計算出来る．

例：σ と y の交換関係

$$T_iY_{i+1}T_i = Y_i \quad\Leftrightarrow\quad T_iY_i - Y_{i+1}T_i = (t-t^{-1})Y_i$$

右の等式に ε に関する展開の式を代入して整理すると，展開の 0 次の係数は $0=0$ となり自明な式しか出て来ないが，展開の 1 次の係数から非自明な関係式を得る：

$$\sigma_i y_i - y_{i+1}\sigma_i = -k.$$

同様の論法で生成元間の交換関係が計算できて，結果は次のようになる：

(1) σ_i は対称群の交換関係を満たす．

(2) $$y_iy_j = y_jy_i,\quad X_iX_j = X_jX_i.$$

(3) κ は central element.

(4) $$\sigma_iX_i\sigma_i = X_{i+1},\quad \sigma_iX_j = X_j\sigma_i\ (|i-j|>1).$$

(5) $$\sigma_iy_i - y_{i+1}\sigma_i = -k,\quad \sigma_iY_j = Y_j\sigma_i\ (|i-j|>1).$$

(6) $$[X_i,y_j] = \begin{cases} kX_i\sigma_{i,j}, & (i<j), \\ k\sigma_{i,j}X_i, & (i>j), \\ -\kappa X_i - k\left(\sum_{1\le r<i}\sigma_{r,i}X_i + \sum_{i<r\le n}X_i\sigma_{r,i}\right), & (i=j). \end{cases}$$

Definition 3.1. この *algebra* を（$\mathfrak{g}l_n$ 型）*degenerte double affine Hecke algbera* と呼び，$\mathcal{H}_{da}^{trig}(\mathfrak{g}l_n)$ と記す.

この先は全く同様である．誘導により多項式表現 $\mathcal{H}_{da}^{trig}(\mathfrak{g}l_n) \curvearrowright \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \cdots, X_n^{\pm 1}]$ を構成する．このとき y_j たちは互いに可換であるが，さらに対角化可能である．したがって同時対角化可能である．これらの同時固有関数として**非対称 Jack 多項式**が定まる．y_j たちは微分作用素ではないが、その対称化をとると微分作用素になっており，これらの同時固有関数は **Jack 多項式**と呼ばれる直交多項式となる.

Remark . 微分極限をとる方法はこれだけではなく，rational degeneration と呼ばれる別の極限操作も知られている．この場合，退化の結果現れる algebra は **rational Cherednik algebra** と呼ばれている.

3.2. **差分極限（additive degeneration）.** 直交多項式の中には q-差分方程式や微分方程式ではなく，差分方程式によって統制されるクラスがある．このようなクラスに対しても Hecke algebra を用いたアプローチが有効であることを紹介したい.

そのための準備として，1.3 節で述べた Askey-Wilson 多項式の Hecke algebra 的取り扱いについて述べる．(詳しくは [NS],[Sh] 参照．)

Definition 3.2. 以下の生成元と関係式で定まる $\mathbb{C}(t_0, t_1, t_{0^*}, t_{1^*})$ 上の単位元を持つ結合代数を $(C_1, C_1^\vee)$ 型[7] *double affine Hecke algebra* と呼び，$\mathcal{H}_{da}(C_1, C_1^\vee)$ と記す.

○ 生成元：$T_0,\ T_1,\ T_{0^*},\ T_{1^*}$

○ 関係式：

(1) $(T_i - t_i)(T_i + t_i^{-1}) = 0, \quad (T_{i^*} - t_{i^*})(T_{i^*} + t_{i^*}^{-1}) = 0 \quad (i = 0, 1)$

(2) $q^{-1/2} := T_0 T_{0^*} T_1 T_{1^*}$ は全ての生成元と可換.

$\mathcal{H}_{da}(C_1, C_1^\vee)$ の 2 つの subalgebra を

$$\mathcal{H}_a^{(1)} := \langle T_0,\ T_1 \rangle, \quad \mathcal{H}_a^{(2)} := \langle T_1,\ X_1^{\pm} \rangle \quad (X_1 := T_1 T_{1^*})$$

と定める．$\mathcal{H}_a^{(1)}$ が $A_1^{(1)}$ 型 affine Hecke algebra であることは明らかであろう．一方非自明ではあるが $\mathcal{H}_a^{(2)}$ も $A_1^{(1)}$ 型 affine Hecke algebra であることがわかる.

また $X_0 := T_0 T_{0^*}$ とおくと，

$$X_1 X_0 = X_0 X_1$$

が成り立つ．そこで $X_0^{\pm}, X_1^{\pm}$ で生成される（可換な）subalgebra を $Q(A_1^{(1)})$ の群環と同一視する．すなわち $\lambda = \lambda_0 \alpha_0 + \lambda_1 \alpha_1 \in Q(A_1^{(1)})$ に対し，$X^\lambda = X_0^{\lambda_0} X_1^{\lambda_1}$ と書くことにする．このとき（非自明であるが）次の Lusztig's relations が成り立つ：

$$T_i X^\lambda - X^{s_i(\lambda)} T_i = \mathbf{b}(t_i, t_i^*; X_i^{-1})(X^\lambda - X^{s_i(\lambda)}).$$

このようにして $\mathcal{H}_{da}(C_1, C_1^\vee)$ を一種の double affine Hecke algebra と見ることができる[8].

---

[7]通常 affine root system を考える場合には，reduced なものしか考えないが，non-reduced な affine root system の中に $(C_1, C_1^\vee)$ 型と呼ばれるものがある．詳しくは Macdonald の教科書 [M5] を参照されたい.

[8]今回定義した代数は本来「$A_1^{(1,1)}$ 型 elliptic root system に付随する elliptic Hecke algebra」と呼ばれるもので ([SS])，$\mathcal{H}_{da}(C_1, C_1^\vee)$ の定義は別にある（Lusztig's relations を用いた formulation）.

この後はこれまでと同じレシピに従う．すなわち $\mathcal{H}_a^{(1)}$ の自明表現を全体に誘導し，多項式表現を作る．中心元 $q^{-1/2} = T_0T_{0^*}T_1T_{1^*}$ をパラメータのように扱って，係数体を $\mathbb{K} := \mathbb{C}(t_0, t_1, t_{0^*}, t_{1^*}, q^{1/2})$ と拡大しておけば

$$\mathcal{H}_{da}(C_1, C_1^\vee) \curvearrowright \mathbb{K}[X_1, X_1^{-1}]$$

が得られる．このとき $\mathcal{H}_a^{(1)}$ の translation part の生成元 $Y_1 := T_1T_0$ は対角化可能で，その固有関数として非対称 Askey-Wilson 多項式が得られる．またその対称化 $Y_1 + Y_1^{-1}$ の固有関数として Askey-Wilson 多項式が得られる ([NS],[Sh])．また直交性や双対性も $\mathcal{H}_{da}(C_1, C_1^\vee)$ の表現論の言葉で説明出来る．

また 1.3 節で述べた Askey-Wilson 多項式のパラメータ a, b, c, d と Hecke algebra のパラメータの対応は次のようになっている．

$$a = t_1t_{1^*},\ b = -t_1t_{1^*}^{-1},\ c = q^{1/2}t_1t_{1^*},\ d = -q^{1/2}t_1t_{1^*}^{-1}.$$

• <u>差分極限</u>

要は q-差分が差分に退化するような極限

$$f(qX) - f(X) \quad \rightsquigarrow \quad f(x+1) - f(x)$$

を考えたいわけである．

$$X_1 = \exp \varepsilon x, \qquad q = \exp \varepsilon,$$
$$a = \exp \varepsilon\alpha,\ b = \exp \varepsilon\beta,\ c = \exp \varepsilon\gamma,\ d = \exp \varepsilon\delta$$

として，全てを ε に関して展開する．このとき微分極限のときと同様のプロセスによって次の代数を得る．

Definition 3.3. 次の生成元と関係式で定義される $\mathbb{K}_{ad} := \mathbb{C}(\tau_0, \tau_1, \tau_{0^*}, \tau_{1^*})$ 上の単位元を持つ結合代数を $\mathcal{H}_{da}^{ad}(C_1, C_1^\vee)$ と書き，加法的 *Hecke* 代数と呼ぶ．

○ 生成元：$g_0,\ g_1,\ g_{0^*},\ g_{1^*}$

○ 関係式：
(1) $g_i^2 = \tau_i^2, \quad g_{i^*}^2 = \tau_{i^*}^2 \quad (i = 0, 1).$

(2) $g_0 + g_{0^*} + g_1 + g_{1^*} = 1/2.$

$\mathcal{H}_a^{ad,(1)} := \langle g_0, g_1 \rangle$ とおき，$\mathcal{H}_a^{ad,(1)}$ の自明表現を全体に誘導して表現を構成する．このとき表現空間は $x := g_1 + g_{1^*}$ として，多項式環 $\mathbb{K}_{ad}[x]$ と同型になる．すなわち

$$\mathcal{H}_{da}^{ad}(C_1, C_1^\vee) \curvearrowright \mathbb{K}_{ad}[x] \quad (\textbf{多項式表現})$$

が得られる．

$$y := -g_0 - g_1$$

とおくと，これは $\mathbb{K}_{ad}[x]$ 上対角化可能で，その固有関数を非対称 Wilson 多項式と呼ぶ．さらに y^2 は $\mathbb{K}_{ad}[x]$ 上に差分作用素として act しており，その固有関数として **Wilson 多項式**と呼ばれる直交多項式が得られる (Groenevelt [G1], (Kakei-Nishizawa-S))．また直交性，双対性も $\mathcal{H}_{da}^{ad}(C_1, C_1^\vee)$ の表現論を用いて説明出来る．この辺の事情は

しかし「$\mathcal{H}_{da}(C_1, C_1^\vee)$ と $A_1^{(1,1)}$ 型 elliptic Hecke algebra は同型である」ということが証明できるので，今回はこの結果を “定義” として採用した．

これまでに説明して来たケースと同様である．

出発点のルート系を $(C_1, C_1^\vee)$ から $(C_n, C_n^\vee)$ に取り替えることで，Koornwinder 多項式が得られることは以前から知られていたが（[St]），この差分極限を考えることで van Diejen ([D]) によって導入された多変数直交多項式 (多変数 Wilson 多項式と呼ばれる) の代数的構造が理解出来る (Groenevelt [G2], (Kakei-Nishizawa-S)).

今回紹介したものだけでなく，Askey スキームに現れる他の多項式やその多変数化で，同様のアプローチが可能な場合がある（もちろん全てではないが）．すなわち,「その気になればやることはいくらでもある」というのが現状である[9].

4. 別の側面（関連する話題）

最後に，かなり話はそれるが，Hecke 代数とその多項式表現に関連する別の話題として，Joseph 多項式との関係について述べたい．

double affine Hecke algbera は Macdonald 多項式に関するいくつかの予想 (Madonald 自身による) を解くために，1990 年代の初めに Cherednik によって導入された代数である ([C1], [C2]) が，その導入の初期段階から q-KZ 方程式との関係も常に意識されていた．言い方を換えれば q-KZ 方程式は double affine Hecke algbera の導入のもう一つの動機であると言ってもよい．ここで q-KZ 方程式とは，可解格子模型における相関関数が満たす q-差分方程式で，可解格子模型の研究において基本的な役割を果たすものである．

したがって，q-KZ 方程式を解くことは格子模型の立場からも重要な意味を持つのだが，Di Francesco と Zinn-Justin は q-KZ 方程式の多項式解の $q \to -1$ の極限として Joseph 多項式が現れることを発見した（[DZ]）[10]．ここで Joseph 多項式とは，Weyl 群の Springer 表現の多項式実現を与える多項式で，その構成には代数的もしくは幾何学的な深い結果が用いられる (*cf.* Joseph [J1], [J2], Hotta [H]).

最近筆者達は，A 型の場合に，上記「発見」に関する数学的な証明を得た (Ikeda-Kakei-Naruse-Takeyama-S)．概略を簡単に紹介すると，まず q-KZ の多項式解の空間には A 型の Hecke algebra が作用していることがわかる．

$$A \text{ 型 Hecke algebra } \curvearrowright q\text{-KZ の多項式解の空間} \quad (\text{多項式表現})$$

ここで dual canonical base の理論を用いて，q-KZ の多項式解（正確にはその $q \to -1$ での極限）を left cell 表現の自然な基底を使って書き直す．A 型の場合には associate variety の既約性が知られている ([Me]) ので，left cell 表現と Springer 表現は自然な基底を込めて一致する．このようにして Springer 表現の自然な基底 (の多項式実現) である Joseph 多項式と q-KZ の多項式解 (の $q \to -1$ での極限) が一致することが示される．

Hecke algebra の多項式表現は，それ自身はわりと単純なものであるけれども，いろいろな数学と結びついている．上で述べた Joseph 多項式との関係は，このことを示す一つの証拠にはなっていると思う．

---

[9]少なくとも筆者自身は，Askey スキームに現れる全ての直交多項式に対してこのようなアプローチが有効なのかどうか？という問いに対する明確な解答は持っていない．「いつでも可能」と思うのは，あまりに楽観的すぎると思うけれども，適応範囲を広げることは可能であろうと考えている．

[10]これは物理の論文で，少なくとも筆者には「数学的な証明」が書いているようには思えない．「発見」という言葉を使ったのはそのためである．

References

[C1] I. Cherednik, *Double affine Hecke algebras, Knizhnik-Zamolodchikov equations, and Macdonald's operators*, IMRN **9** (1992), 171–180.

[C2] I. Cherednik, *Double affine Hecke algebras and Macdonald's conjectures*, Ann. of Math. **141** (1995), 191–216.

[C3] I. Cherednik, *Double affine Hecke algebras*, London Math. Soc. Lecture Note Series **319**, Cambridge University Press (2005).

[Chi] T. S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials*, Mathematics and its Applications, Vol. **13** (1978). Gordon and Breach Science Publishers.

[D] J. F. van Diejen, *Multivariable continuous Hahn and Wilson polynomials related to integrable difference systems*, J. Phys. A: Math. Gen. **28** (1995), 369-374.

[DZ] P. Di Francesco and P. Zinn-Justin, *Quantum Knizhnik-Zamolodchikov equation, generalized Razumov-Stroganov sum rules and extended Joseph polynomials*, J. Phys. A **38** (2005), 815-822.

[DX] C. F. Dunkl and Y. Xu, *Orthogonal polynomials of several variables*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications **81** (2001), Cambridge University Press.

[GR] G. Gasper and M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications **35** (1990), Cambridge University Press.

[G1] W. Groenevelt, *Fourier transforms related to a root system of rank 1*, Transform. Groups **12** (2007), no. 1, 77–116.

[G2] W. Groenevelt, *Multivariable Wilson polynomials and degenerate Hecke algebras*, arXiv:0710.3078.

[H] R. Hotta, *On Joseph's construction of Weyl group representations*, Tohoku Math. J. **36** (1984), 49-74.

[J1] A. Joseph, *Goldie rank in the enveloping algebra of a semisimple Lie algebra I, II*, J. Algebra **65** (1980), 269-283, 284-316.

[J2] A. Joseph, *On the variety of a highest weight module*, J. Algebra **88** (1984), 238-278.

[K] A. A. Kirillov Jr., *Lectures on affine Hecke algebras and Macdonald's conjectures*, Bull. Amer. Math. Soc. **34** (1997), 251–292.

[KS] R. Koekoek and R. F. Swarttouw, *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue*, http://fa.its.tudelft.nl/ koekoek/askey.html

[Ko] T. Koornwinder, *Askey-Wilson polynomials for root systems of type BC*, Contemp. Math. **138** (1992), 189–204.

[L] D.A.Leonard *Orthogonal Polynomials, Duality and Association Schemes*, SIAM J. Math.Anal. **13** (1982) No.4 656 - 663

[M1] I. G. Macdonald, *Orthogonal polynomials associated with root systems*, Sém. Lothar. Combin. **45** (2000), 1–40.

[M2] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Second edition, Oxford University Press (1995),

[M3] I. G. Macdonald, *Affine Hecke algebras and orthogonal polynomials*, Astérisque **237** (1996), 189–207.

[M4] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and orthogonal polynomials*, University Lecture Series **12**, Amer. Math. Soc. (1998).

[M5] I. G. Macdonald, *Affine Hecke algebras and orthogonal polynomials*, Cambridge Tracts in Math. **157** (2003).

[Me] A. Melnikov, *Irreducibility of the associated varieties of simple highest weight modules in* $\mathfrak{sl}(n)$, Comptes Rendus **316** (1993), 53-57.

[N] M. Noumi, *Macdonald-Koornwinder polynomials and affine Hecke rings*, 数理解析研究所講究録 **919** (1995), 44–55.

[NS] M. Noumi and J. V. Stokman, *Askey-Wilson polynomials: an affine Hecke algebra approach*, Laredo Lectures on Orthogonal Polynomials and Special Functions, Adv. Theory Spec. Funct. Orthogonal Polynomials (2004), 111–144.

[Sh] S. Sahi, *Nonsymmetric Koornwinder polynomials and duality*, Ann. of Math. **150** (1999), 267–282.

[SS] Y. Saito, and M. Shiota, *On Hecke algebras associated to elliptic root systems*, to appear.
[St] J. V. Stokman, *Koornwinder polynomials and affine Hecke algebras*, IMRN. **2000**, no. 19, 1005–1042.

Graduate School of Mathematical Sciences,
University of Tokyo,
Tokyo 153-8914,Japan
E-mail address: yosihisa@ms.u-tokyo.ac.jp