２０１３年度数学IA演習（第２回）
（５２３教室，５月７日）

担当：斉藤　義久

○ **注意事項**

- **解答用紙は タテに使用 すること．**
- **名前と学生番号を忘れずに記入すること．また記入場所は，解答用紙の上方 とする．**
- **提出された答案は出席票の代わりとして用いる．ただし，白紙答案，またはそれに近い答案を提出した場合は，出席を取り消す場合がある．**

---

[1] $f(x)$ を $\mathbb{R}$ で定義された関数とする．

(1) $f(x)$ が微分可能で，かつ $f'(x) = 0$ ならば，$f(x)$ は定数関数であることを示せ．

(2) $f(x)$ が $n+1$ 回微分可能で，かつ $f^{(n+1)}(x) = 0$ ならば，$f(x)$ は n 次以下の多項式関数であることを示せ．

注）本問に限り解き方を限定して，**微積分の基本定理は禁じ手**とする．

[2] X を a をその内部に含む $\mathbb{R}$ の部分集合，$Y = X \setminus \{a\}$，$f(x), g(x)$ を X 上定義された連続関数で，Y 上で微分可能とする．さらに Y 上では $g(x) \neq g(a)$ かつ $g'(x) \neq 0$ とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するならば，等式 $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$ が成り立つこと示せ．

(2) 今度は $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$ の存在を仮定する．このとき，$\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$ が成り立つか？ 成り立つなら証明し，そうでないなら反例を挙げて説明せよ．

[3] $f(x)$ は $x=0$ の近傍で $n+1$ 回微分可能な関数とする．このとき

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

と表示出来る（テイラーの定理）．右辺の多項式部分

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

を，$f(x)$ の（$x=0$ における）n **次のテイラー近似多項式**と呼ぶことにする[1]

[1] これは一般的な呼び方ではなく，この講義だけの言い方．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f_n(x)}{x^n}=0$ を示せ．

(2) n 次以下の多項式 $P_n(x)$ が

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_n(x)}{x^n}=0 \tag{$*$}$$

を満たすならば，$P_n(x)=f_n(x)$ であることを証明せよ．

(3) $f(x)=\begin{cases} e^{-1/|x|} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ とするとき，この $f(x)$ に対して上の条件 $(*)$ を満たす多項式 $P_n(x)$ を求めよ．

[4] 前問の条件 $(*)$ を一般化して，次の概念を導入する．$f(x), g(x), h(x)$ を $x=0$ の近傍で定義された関数とする（$x=0$ では定義されていなくても良い）．条件

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{h(x)}=0$$

が成り立つとき，

$$f(x)=g(x)+o(h(x))$$

と表記する．特に $h(x)=x^n$ である場合，$x=0$ の近傍で $g(x)$ は $f(x)$ を n **次より高く近似する**といい，

$$g(x)=f(x)+o(x^n)$$

と書く（$g(x)$ として多項式 $P(x)$ を取った場合が前問）．

次の漸近展開を証明せよ．

(1) $\sqrt{x(1+x)}=\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}x\sqrt{x}+o(x^2)$

(2) $(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\left(1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{11}{24}x^2-\dfrac{7}{16}x^3\right)+o(x^3)$

コメント）関数 $f(x)$ の形が複雑で（例えば (2) のような場合），$x=0$ の近傍での挙動がよくわからない場合，このような近似表示は時として非常に有効である．右辺のような近似表示を，$f(x)$ の $x=0$ における**漸近展開**と呼ぶ．

○ 発展問題

$f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ とする．$f(x)$ の $x\to+0$ における漸近展開が

$$f(x)=g(x)+o(x^2)$$

で与えられるとき，$g(x)$ の具体形を求めよ．